

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Ein und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit eilf lithographirten Tafeln.

Berlin, 1846.
Bei G. Reimer.
Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

1.

Entwicklung eines symmetrischen Ausdrucks für den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung.

(Von *Herrn Ferd. Minding*, Professor an der Universität zu Dorpat.)

(Gelesen in der Sitzung der Petersburger Akademie der Wissenschaften am $\frac{24.\text{ Nov.}}{6.\text{ Decbr.}}$ 1843, und aus dem Bulletin übersetzt.)

Im 22. Bande des gegenwärtigen Journals habe ich ein neues Verfahren angegeben zur Bestimmung des Grades der Gleichung in x, welche durch Elimination von y zwischen zwei algebraischen Gleichungen $f(x,y)=f=A_0y^m+A_1y^{m-1}+\ldots A_m=0$, und $\varphi(x,y)=\varphi=B_0y^n+B_1y^{n-1}+\ldots+B_n=0$ erhalten wird, wo die Buchstaben A und B, mit angehängten Zeigern, beliebige ganze Polynome in x bedeuten. Der folgende Aufsatz betrifft einige weitere Entwickelungen dieses Gegenstandes. Obgleich nämlich jenes Verfahren für die Leichtigkeit der Rechnung wohl nichts zu wünschen übrig lässt, so führt es doch nicht auf einen Ausdruck, welcher aus den durch beide Gleichungen gelieferten Elementen symmetrisch zusammengesetzt wäre. Nach der Natur der Sache muss es aber einen solchen Ausdruck geben, und es scheint nicht unerheblich, denselben zu entwickeln.

Werden, wie in dem genannten Artikel, die Wurzeln y der Gleichung $\varphi=0$ durch $y_1, y_2, \ldots y_n$, die Wurzeln y oder η der Gleichung $f=0$ durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta^m$ bezeichnet, und ist $\psi x=0$ die Endgleichung, so hat man:

$$\psi x=A_0^nB_0^m[(y_1-\eta_1)(y_1-\eta_2)\ldots(y_1-\eta_m)]\,[(y_2-\eta_1)(y_2-\eta_2)\ldots(y_2-\eta^m)]\ldots\ldots[(y_n-\eta_1)(y_n-\eta_2)\ldots(y_n-\eta_m)]$$

Man theile die Wurzeln y in Gruppen nach ihren verschiedenen Graden: nämlich die Gleichung $\varphi=0$ habe r_1 Wurzeln y vom Grade h_1, r_2 Wurzeln vom Grade h_2, ... endlich r_i Wurzeln vom Grade h_i, und es sei $h_1>h_2\ldots>h_i$; wo das Zeichen $>$ die Gleichheit ausschliesst. Auf gleiche Weise werden

sich die Wurzeln η in eine Anzahl (j) von Gruppen theilen, nämlich in p_1 Wurzeln vom Grade ε_1, p_2 vom Grade $\varepsilon_2, \ldots$ endlich p_j vom Grade ε_j; es sei wiederum $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \ldots > \varepsilon_j$. Betrachtet man nun mit einiger Aufmerksamkeit den vorstehenden Ausdruck von ψx, so sieht man, dass der Grad von ψx dargestellt wird durch eine Summe der Grade der Wurzeln y und η, in welcher jede Wurzel aus einer der beiden Reihen y und η so viele Male vorkommt, als sich in der andern Reihe Wurzeln finden, deren Grad niedriger ist als jener der anfänglich gewählten Wurzel. Hieraus folgt der Lehrsatz:

Ordnet man die Wurzeln y *und* η *der vorgelegten Gleichungen in eine Reihe nach der absteigenden Folge ihrer Grade, so erhält man den Grad der Endgleichung* $\psi x = 0$, *indem man den Grad jeder Wurzel, sowohl aus der Reihe* y, *als aus* η, *mit der Anzahl der Wurzeln der andern Reihe, welche ihr in der vorausgesetzten Anordnung nachfolgen, multiplicirt, diese sämmtlichen Producte addirt und zu der Summe noch* $na_0 + mb_0$ *hinzufügt; wo* a_0 *und* b_0 *die Grade von* A_0 *und* B_0 *andeuten.*

Hierbei ist noch zu bemerken, dass es, wenn der Grad einiger y dem Grade einiger η gleich ist, für die Anwendung der vorstehenden Regel gleichgültig ist, ob man die y den η gleichen Grades vorangehen oder folgen lässt. Der Klarheit wegen sollen im Folgenden immer die y den η von gleichem Grade, oder die h den ihnen gleichen ε vorangestellt werden.

Sind also zwei Gleichungen vorgelegt, welche z. B. $i = 3$, $j = 4$ und $h_1 \overline{\overline{>}} \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > h_2 > h_3 \overline{\overline{>}} \varepsilon_3 > \varepsilon_4$ geben, so erhält man, da es r_1, r_2, r_3 Wurzeln y beziehungsweise von den Graden h_1, h_2, h_3, und p_1, p_2, p_3, p_4 Wurzeln η beziehungsweise von den Graden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ giebt, den Grad der Endgleichung ausgedrückt durch

$$g = na_0 + mb_0 + r_1 h_1 m + (r_2 h_2 + r_3 h_3)(p_3 + p_4) + (p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2)(r_2 + r_3),$$

wo g allgemein diesen Grad bezeichnet und für $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ sein Werth m, d. i. die Anzahl der Wurzeln η gesetzt ist.

Um ein Beispiel in Zahlen zu geben, sei

$$f = \overline{(x^6)y^8} + (x^4)y^7 + \overline{(x^9)y^6} + (x^8)y^5 + \overline{(x^{10})y^4} + (x^8)y^3 + (x^7)y^2 + (x^5)y + \overline{(x^6)} = 0$$
$$\varphi = \overline{(x^3)y} + \overline{(x^9)y^6} + (x^4)y^5 + \overline{(x^7)y^4} + (x^6)y^3 + (x^5)y^2 + \overline{(x^4)y} + \overline{(x^2)} = 0.$$

In diesem Beispiel sind durch einen obern Querstrich die Glieder der Polynome f und φ bezeichnet, aus welchen sich die Grade der Wurzeln η und y ergeben, und welche ich deshalb *gradbestimmende Glieder* nennen

will; die Unterscheidung derselben, übrigens sehr leicht, ist bei verschiedenen Untersuchungen wesentlich, wie man Seite 263 des 20. Bandes dieses Journals sehen kann, wo diese Glieder *termini principales* genannt sind. Es ergeben sich nämlich die Grade der Wurzeln η und y aus folgenden nach und nach sich darbietenden Gleichungen:

$$8\varepsilon_1+6=6\varepsilon_1+9,\quad 6\varepsilon_2+9=4\varepsilon_2+10,\quad 4\varepsilon_3+10=6;\quad 7h_1+3=6h_1+8,$$
$$6h_2+8=4h_2+7,\quad 4h_3+7=h_3+4,\quad h_4+4=2,$$

woraus folgt:

$$\varepsilon_1=\tfrac{3}{2},\ p_1=2;\quad \varepsilon_2=\tfrac{1}{2},\ p_2=2;\quad \varepsilon_3=-1,\ p_3=4;\quad h_1=5,\ r_1=1;$$
$$h_2=-\tfrac{1}{2},\ r_2=2;\quad h_3=-1,\ r_3=3;\quad h_4=-2,\ r_4=1;$$

mithin $h_1>\varepsilon_1>\varepsilon_2>h_2>h_3=\varepsilon_3>h_4$. Hieraus findet man den Grad g der Endgleichung $\psi x=0$:

$$g=7.6+8.3+8h_1+2.4h_2+2.6\varepsilon_1+3.4h_3+2.6\varepsilon_2+4\varepsilon_3$$
$$=66+40-4-12+18+6-4=110.$$

Im 6. Artikel des 22. Bandes dieses Journals ist für g der Ausdruck gegeben worden: $g=mb_0+k_1+k_2+\ldots+k_n$, wo k allgemein den Grad bezeichnet, welchen $f(x,y)$ erhält, wenn man darin für y eine der Wurzeln y vom Grade h der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ setzt. Dieser Aufsatz bedarf einer passenden Umgestaltung, um mit dem vorstehend Entwickelten verglichen zu werden.

Man schreibe $(x^{a_0})\ (x^{a_1})\ \ldots\ (x^{a_m})\ (x^{b_0})\ (x^{b_1})\ \ldots\ (x^{b_n})$
anstatt $A_0\ A_1\ \ldots\ A_m\ \ B_0\ B_1\ \ldots\ B_n$

so dass $a_0, a_1, \ldots b_n$ die Grade der Polynome $A_0, A_1, \ldots B_n$ ausdrücken. Es seien $(x^{b_0})y^n,\ (x^{b_{\lambda_1}})y^{n-\lambda_1},\ (x^{b_{\lambda_2}})y^{n-\lambda_2}\ \ldots\ldots\ (x^{b_{\lambda_{i-1}}})y^{n-\lambda_{i-1}},\ (x^{b_n})$
die gradbestimmenden Glieder von $\varphi(x,y)$, nach der Reihe gestellt, nämlich so, dass

$$0<\lambda_1<\lambda_2\ \ldots\ldots<\lambda_{i-1}<n \text{ ist.}$$

Man sieht nämlich leicht, dass das erste und letzte Glied des Polynoms $\varphi(x,y)$ immer zu diesen gradbestimmenden Gliedern gehören, und ich füge noch die leicht zu beweisende Bemerkung hinzu, dass wenn $b_{\lambda'}$ die grösste unter den Zahlen $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_n$ ist, das Glied $(x^{b_{\lambda'}})y^{n-\lambda'}$ von φ ebenfalls ein gradbestimmendes sein wird. Wenn es in der Reihe $b_0, b_1, \ldots b_n$ mehrere Zahlen $b_{\lambda'}, b_{\lambda''}, \ldots b_{\lambda^u}$ giebt, die einander gleich sind, und grösser als alle übrigen Zahlen dieser Reihe, so sind unter der Voraussetzung, dass $\lambda'<\lambda''\ \ldots<\lambda^u$ sei, das erste und das letzte der Glieder $(x^{b_{\lambda'}})y^{n-\lambda'},\ (x^{b_{\lambda''}})y^{n-\lambda''},\ \ldots\ldots\ (x^{b_{\lambda^u}})y^{n-\lambda^u}$ gradbestimmende, die andern aber sind es nicht.

Allgemein liefert jedes Glied der Reihe

$nh+b_0,\ (n-\lambda_1)h+b_{\lambda_1},\ \ldots\ldots\ (n-\lambda_\varsigma)h+b_{\lambda_\varsigma},\ \ldots\ldots\ (n-\lambda_{i-1})h+b_{\lambda_{i-1}},\ b_n,$

mit Ausnahme des ersten und des letzten, zwei verschiedene Werthe von h, je nachdem es dem ihm vorangehenden oder nachfolgenden gleichgesetzt wird. Denn es ist $(n-\lambda_{\varsigma-1})h_\varrho+b_{\lambda_{\varsigma-1}}=(n-\lambda_\varsigma)h+b_{\lambda_\varsigma}$ und $(n-\lambda_\varsigma)h_{\varsigma+1}+b_{\lambda_\varsigma}$ $=(n-\lambda_{\varsigma+1})h_{\varsigma+1}+b_{\lambda_{\varsigma+1}}$, und $h_\varsigma>h_{\varsigma+1}$. Liegt nun der Grad ε einer Wurzel η zwischen h_ς und $h_{\varsigma+1}$, oder ist er $=h_\varsigma$, so sieht man leicht, dass unter den Ausdrücken

$n\varepsilon+b_0,\ (n-1)\varepsilon+b_1,\ (n-2)\varepsilon+b_2,\ \ldots\ldots\ \varepsilon+b_{n-1},\ b_n,$

$(n-\lambda_\varsigma)\varepsilon+b_{\lambda_\varsigma}$ den grössten Werth hat, oder wenigstens, wenn $\varepsilon=h_\varsigma$, dem Werthe von $(n-\lambda_{\varsigma-1})\varepsilon+b_{\lambda_{\varsigma-1}}$ und vielleicht noch einigen andern Werthen von $(n-\lambda)\varepsilon+b_\lambda$, deren λ zwischen $\lambda_{\varsigma-1}$ und λ_ς liegen, gleich ist; aber grösser als die übrigen Glieder obiger Reihe. Folglich ist, wenn l den Grad bezeichnet, den φ erhält, wenn darin für y eine Wurzel η vom Grade ε gesetzt wird, $l=(n-\lambda_\varsigma)\varepsilon+b_{\lambda_\varsigma}$. Ist $\varepsilon=h_\varsigma$, so hat man auch noch $l=$ $(n-\lambda_{\varsigma-1})\varepsilon+b_{\lambda_{\varsigma-1}}$, und da es für das Folgende nöthig ist, zwischen diesen Ausdrücken von l zu wählen, so sei festgesetzt, dass immer der erste gewählt werde, d. h. derjenige, welcher den grössten Werthen von ϱ und λ_ς entspricht. Bezeichnen nun $l_1\ l_2\ \ldots\ l_j$ die beziehungsweise zu $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \ldots\ \varepsilon_j$ gehörigen l, und bedenkt man, dass p_1 Wurzeln η vom Grade $\varepsilon_1, \ldots.$ vorhanden sind, so verwandelt sich der im genannten Artikel gegebene Ausdruck von g in folgenden:

$$g=na_0+p_1l_1+p_2l_2+\ldots+p_jl_j=na_0+\sum_{\gamma=1}^{\gamma=j}(p_\gamma l_\gamma).$$

Setzt man für l_γ seinen Werth $(n-\lambda_\varsigma)\varepsilon_\gamma+b_{\lambda_\varsigma}$, so folgt hieraus

$$g=na_0+\sum_{\gamma=1}^{\gamma=j}(p_\gamma b_{\lambda_\varsigma})+\sum_{\gamma=1}^{\gamma=j}\{(n-\lambda_\varsigma)p_\gamma\,\varepsilon_\gamma\}\qquad I.$$

wo immer ϱ durch die Bedingung $h_\varsigma \gtreqless \varepsilon_\gamma > h_{\varsigma+1}$ bestimmt ist.

Sind eben so $(x^{a_0})y^m,\ (x^{a_{\theta_1}})y^{m-\theta_1},\ \ldots\ldots\ (x^{a_{\theta_\nu}})y^{m-\theta_\nu},\ \ldots\ldots\ (x^{a_{\theta_{j-1}}})$ $y^{m-\theta_{j-1}},\ (x^{a_m})$ die gradbestimmenden Glieder von f, und ist $0<\theta_1<\theta_2\ \ldots.$ $<\theta_{\varsigma-1}<m$; ist ferner h der Grad einer Wurzel y von $\varphi=0$, die entweder zwischen ε_ν und $\varepsilon_{\nu+1}$ liege, oder gleich $\varepsilon_{\nu+1}$ sei: so wird der Grad, den f durch Einsetzung einer Wurzel y vom Grade h von $\varphi=0$, anstatt y, erhält, ausgedrückt durch $k=(m-\theta_\nu)h+a_{\theta_\nu}$. Ist $h=\varepsilon_{\nu+1}$, so hat man noch $k=(m-\theta_{\nu+1})h+a_{\theta_{\nu+1}}$, weil $(m-\theta_\nu)\varepsilon_{\nu+1}+a_{\theta_\nu}=(m-\theta_{\nu+1})\varepsilon_{\nu+1}$

$+a_{\theta_{\nu+1}}$. In diesem Falle soll die Wahl des Zeigers ν immer den kleinsten Werth desselben treffen, welcher den kleinsten Werth von θ_ν mit sich führt. Der Ausdruck von g wird daher, dem vorigen entsprechend, wenn man noch erwägt, dass es r_1 Wurzeln y vom Grade h_1 giebt, welche für den Grad von f den Werth k_1 geben, u. s. f., folgender:

$$g = mb_0 + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i}(\nu_\gamma k_\gamma) \text{ oder } g = mb_0 + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i}(r_\gamma a_{\theta_\nu}) + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i}\{(m-\theta_\nu) r_\gamma h_\gamma\} \qquad II.$$

wo ν durch die Bedingung $\varepsilon_\nu > h\gamma \overline{\gtrless} \varepsilon_{\nu+1}$ bestimmt ist.

Gehen wir nun auf die im Anfange dieses Aufsatzes ausgesprochene Regel zurück. Wenn man die Werthe von h und ε nach ihrer Grösse fallend ordnet, und zu grösserer Klarheit jedes h so oft schreibt, als es Wurzeln y vom Grade h giebt, also r mal, und jedes ε, p mal; wenn man ferner, im Falle der Gleichheit eines h mit einem ε, jenes diesem voranstellt; so braucht man nur zu zählen, wie viele h jedem ε und wie viele ε jedem h folgen. Man sieht aber leicht, dass die Anzahl der auf irgend ein h, nämlich auf h_γ, folgenden ε, $m-\theta_\nu$ ist, wo θ_ν genau in dem Sinne zu nehmen ist, welcher ihm in dem Ausdrucke *II.* zukommt. Denn da h_γ kleiner ist als ε_ν und grösser als $\varepsilon_{\nu+1}$, oder gleich $\varepsilon_{\nu+1}$, so sind die auf h_γ folgenden ε diese: $\varepsilon_{\nu+1}\ \varepsilon_{\nu+2} \ldots \varepsilon_j$; wovon jedes beziehungsweise $p_{\nu+1}\ p_{\nu+2} \ldots p_j$ mal zu schreiben ist. Man hat aber $(m-\theta_\nu)\varepsilon_{\nu+1}+a_{\theta_{\nu+1}} = (m-\theta_{\nu+1})\varepsilon_{\nu+1}+a^{\theta}{}_{\nu+1}$, ..., $(m-\theta_{j-1})\varepsilon_j + a_{\theta_{j-1}} = a_m$, und $p_{\nu+1} = \theta_{\nu+1}-\theta_\nu$, $p_{\nu+2} = a_{\theta_{\nu+2}} - a_{\theta_{\nu+1}}$, ..., $p_j = m-\theta_{j-1}$, folglich $p_{\nu+1}+p_{\nu+2}+\ldots+p_j = m-\theta^\nu$, w. z. B. n.

Ebenso ist die Anzahl der auf ε_ν folgenden h gleich $n-\lambda_\varsigma$, λ_ς in dem Sinne des Ausdrucks *I.* genommen; denn da $\varepsilon_\nu \overline{\gtrless} h_\varsigma$ und $\varepsilon_\nu > h_{\varsigma+1}$, so sind $h_{\varsigma+1}\ h_{\varsigma+2} \ldots h_i$ die auf ε_ν folgenden h; ihre Anzahl ist $r_{\varsigma+1}+r_{\varsigma+2}+\ldots+r_i = n-\lambda_\varsigma$.

Fasst man das Vorstehende zusammen, so gelangt man zu einem neuen Ausdruck von g, nämlich:

$$g = na_0 + mb_0 + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i}\{(m-\theta_\nu) r_\gamma h_\gamma\} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=j}\{(n-\lambda_\varsigma)p_\gamma \varepsilon_\gamma\} \qquad III.$$

wo die durch Σ bezeichneten Summen genau die nämlichen sind wie in *I.* und *II.* Daher folgt durch Vergleichung von *I.* und *II.* mit *III.*

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i}(r_\gamma a_{\theta_\nu}) = na_0 + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=j}\{n-\lambda_\varsigma)p_\gamma \varepsilon_\gamma\},\ \sum_{\gamma=1}^{\gamma=j}(p_\gamma b_{\lambda_\varsigma}) = mb_0 + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i}\{(m-\theta_\nu) r_\gamma h_\gamma)\}$$

und schliesslich ein neuer Ausdruck von g, nämlich:

$$g = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i} (r_\gamma a_{\theta_\nu}) + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=j} (p_\gamma b_{\lambda_\zeta}). \qquad IV.$$

Zufolge dieser bemerkenswerthen Formel ist der Grad der Endgleichung in x die Summe der Grade einiger der nach x geordneten Coëfficienten der beiden Gleichungen, nämlich der zu denjenigen Gliedern gehörigen, aus welchen sich für jede Wurzel η oder y die Grade der Functionen $\varphi(x,\eta)$ und $f(x,y)$ ergeben, wo η Wurzeln von $f(x,y)=0$, y Wurzeln von $\varphi(x,y)=0$ sind. Wenn diese Grade von $\varphi(x,y)$ und $f(x,y)$ sich aus mehrern Gliedern herleiten lassen, so wird alle Ungewissheit vermieden, wenn man in dem einen der Polynome f und φ unter den verschiedenen zulässlichen Gliedern das am weitesten rechterhand, und zugleich im andern das am weitesten linkerhand stehende auswählt.

In dem obigen Zahlenbeispiele ist

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i} (r_\gamma a_{\theta_\nu}) = a_0 + 2a_4 + 3a_4 + a_8 = 6 + 2.10 + 3.10 + 6 = 62$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=j} (p_\gamma b_{\lambda_\zeta}) = 2b_1 + 2b_1 + 4b_6 = 2.8 + 2.8 + 4.4 = 48$$

$$\text{daher } g = 62 + 48 = 110.$$

In dem mehrerwähnten Artikel wurde bemerkt, dass nach Elimination von x zwischen $f=0$ und $\varphi=0$, der Grad g' der Endgleichung in y dem Grade g der Endgleichung in x immer gleich ist, wenn (x^{a_0}) und (x^{b_0}) keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und wenn dieselbe Voraussetzung auch von den Coëfficienten der höchsten Potenzen von x in beiden nach x geordneten Gleichungen gilt. Dies folgt ganz einfach daraus, dass unter den angegebenen Bedingungen das vorgelegte System keine andere als endliche Lösungen hat. Man kann jedoch einen, die nähern Umstände darlegenden Beweis dieses Satzes wünschen.

Um das Polynom $\varphi = (x^{b_0})y^n + (x^{b_1})y^{n-1} + \ldots + (x^{b_n})$ nach x zu ordnen, gehe man in der Reihe der Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ bis zu derjenigen b_t fort, welche grösser ist als alle ihr links vorangehenden, und nicht kleiner als

irgend eine der ihr folgenden, nämlich b_{t_1+1}, b_{t+2}, ... b_n. Alsdann suche man in der Reihe $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{t-1}$ diejenige Zahl b_{t_1} welche grösser ist als alle ihr links vorangehenden, und nicht kleiner als irgend eine der ihr rechts nachfolgenden $b_{t_1+1} \ldots b_{t-1}$; in der Reihe $b_0, b_1, \ldots b_{t_1-1}$ suche man hierauf die Zahl b_{t_2}, welche grösser als alle ihr vorangehenden und nicht kleiner als eine der ihr folgenden ist, und so fort, bis man auf b_0 kommt, welche die letzte der Zahlen $b_t, b_{t_1}, b_{t_2}, \ldots b_0$ sein wird. Das Polynom φ, nach x geordnet, muss nun nothwendig folgende Glieder enthalten:

$$(y^{n-t})x^{b_t} \; (y^{n-t_1})x^{b_{t_1}} \; (y^{n-t_2})x^{b_{t_2}} \; \ldots\ldots \; (y^n)x^{b_0} \qquad (a)$$

wo (y^μ), wie immer, ein Polynom vom Grade μ andeutet. Wird noch durch das nämliche Zeichen, mit einem Puncte versehen, nämlich durch $(\dot{y}^\mu)$ ein Polynom bezeichnet, dessen Grad gleich μ oder niedriger als μ ist, so nimmt das Polynom φ, nach x geordnet, folgende allgemeine Gestalt an:

$$\varphi = (y^{n-t})\, x^{b_t} + (\dot{y}^{n-t})\, x^{b_t-1} + (\dot{y}^{n-t})\, x^{b_t-2} + \ldots + (\dot{y}^{n-t})\, x^{b_{t_1}+1}$$
$$+ (y^{n-t_1})x^{b_{t_1}} + (\dot{y}^{n-t_1})x^{b_{t_1}-1} + \ldots + (y^{n-t_2})x^{b_{t_2}} + (\dot{y}^{n-t_2})x^{b_{t_2}-1} + \ldots + (y^n)x^{b_0}$$
$$+ (\dot{y}^n)x^{b_0-1} + (\dot{y}^n)x^{b_0-2} + \ldots + (\dot{y}^n),$$

wo die zwischen die Glieder der Reihe (a) eingeschalteten Glieder sämmtlich mit Puncten versehen sind, weil die Grade ihrer Coëfficienten den in den Klammern befindlichen zugehörigen Exponenten höchstens gleich sein können, aber nicht nothwendig gleich sind.

Es ist nun klar, dass keines der vor $(y^n)x^{b_0}$ eingeschalteten Glieder ein gradbestimmendes Glied der nach x geordneten Gleichung $\varphi = 0$ sein kann, und dass die gradbestimmenden Glieder dieser Gleichung alle entweder in der Reihe (a) enthalten sind, oder sich unter den in vorstehendem Ausdrucke von φ auf $(y^n)x^{b_0}$ folgenden Gliedern befinden. Man erkennt noch sogleich, dass $(y^{n-t})x^{b_t}$, $(y^n)x^{b_0}$ und das letzte Glied $(\dot{y}^n)$ immer gradbestimmende Glieder von φ sein müssen. Es soll nun gezeigt werden, dass, wenn $(y^{n-t_v})x^{b_{t_v}}$ eines der Glieder (a) ist, mit Ausnahme des letzten $(y^n)x^{b_0}$) und zugleich ein gradbestimmendes Glied der nach x geordneten Gleichung $\varphi = 0$, dass alsdann $(x^{b_{t_v}})y^{n-t_v}$ ein gradbestimmendes Glied derselben Gleichung nach y geordnet ist, und umgekehrt.

Denn es sei $(y^{n-t_{v'}})x^{b_{t_{v'}}}$ das gradbestimmende Glied, welches auf das vorhergenannte in der nach x geordneten Gleichung $\varphi = 0$ folgt, und es sei s der Grad von x, welcher aus der Vergleichung dieser beiden Glieder hervorgeht, so hat man $b_{t_v} . s + n - t_v = b_{t_{v'}} . s + n - t_{v'} = u$, und der Werth von

s ist positiv, weil $v' > v$, mithin $t_{v'} < t_v$, $b_{t_{v'}} < b_{t_v}$ ist. Bezeichnet noch σ die Anzahl der Wurzeln x von $\varphi = 0$, deren Grad s ist, so ist $\sigma = b_{t_v} - b_{t_{v'}}$. Nach den Eigenschaften der gradbestimmenden Glieder ist aber $u \overline{\gtrless} b_{t_\omega}.s + n - t_\omega$, wenn ω eine Zahl zwischen v und v', also t_ω eine Zahl zwischen t_v und $t_{v'}$ ist; dagegen ist $u > b_{t_\omega}.s + n - t_\omega$, wenn ω ausserhalb der Grenzen v und v' liegt; ω bezeichnet hier eine der Zahlen $0, 1, 2 \ldots \delta$, und es ist $t_0 = t$, $t_\delta = 0$; $\delta + 1$ ist die Anzahl der Glieder der Reihe (a). Dividirt man nun vorstehende Ausdrücke durch s und setzt $\frac{1}{s} = h$, $\frac{u}{s} = hu = \acute{u}$, so kommt $(n - t_v)\, h + b_{t_v} = (n - t_{v'})h + b_{t_{v'}} = \acute{u}$, $\acute{u} \overline{\gtrless} (n - t_\omega)\, h + b_{t_\omega}$ wenn ω zwischen v und v', $\acute{u} > (n - t_\omega) h + b_{t_\omega}$, wenn ω ausserhalb der Grenzen v und v' liegt.

Ist ϱ eine Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$, welche in $t_\delta, t_{\delta-1} \ldots t_2, t_1, t$ nicht vorkommt, und liegt ϱ zwischen t_ω und $t_{\omega+1}$, so dass $t_\omega > \varrho > t_{\omega+1}$, so ist auch $b_\varrho < b_{t_\omega}$, $b_\varrho < b_{t_{\omega+1}}$, folglich, weil nach der Voraussetzung $\acute{u} \overline{\gtrless} (n - t_{\omega+1})h + b_{t_{\omega+1}}$, so ist auch $\acute{u} > (n - \varrho)h + b_\varrho$. Ist ϱ grösser als t_0 oder t, so ist $b_\varrho \overline{\gtrless} b_t$ und weil $\acute{u} \overline{\gtrless} (n - t)h + b_t$, so ist $\acute{u} > (n - \varrho) h + b_\varrho$.

Hierdurch ist bewiesen, dass das Glied $(x^{b_{t_v}})y^{n-t_v}$, welches in der nach y geordneten Gleichuug $\varphi = 0$ nothwendig vorkommt, auch ein gradbestimmendes Glied derselben ist, wenn $(y^{n-t_v})x^{b_{t_v}}$ ein gradbestimmendes Glied der nach x geordneten Gleichung $\varphi = 0$ (aus der Reihe [a]) war. Da die Umkehrung eben so richtig ist, so folgt: Wenn $(x^{b_0})y^n$, $(x^{b_{\lambda_1}})y^{n-\lambda_1}$, $(x^{b_{\lambda_2}})y^{n-\lambda_2} \ldots (x^{b_t})y^{n-t}$ (b) die Reihe der gradbestimmenden Glieder des nach y geordneten φ ist, fortgesetzt bis zu dem Gliede $(x^{b_t})y^{n-t}$, welches dadurch bestimmt ist, dass $b_t > b_\varrho$ wenn $\varrho < t_1$ und $b_t \overline{\gtrless} b_\varrho$ wenn $\varrho > t$; so stellt $(y^{n-t})x^{b_t} \ldots$, $(y^{n-\lambda_2})x^{b_{\lambda_2}}$, $(y^{n-\lambda_1})x^{b_{\lambda_1}}$, $(y^n)x^{b_0}$ (c) die Reihe der gradbestimmenden Glieder des nach x geordneten φ dar, jedoch nur bis zum Gliede $(y^n)x^{b_0}$. Die Vergleichung der Glieder (b) liefert die positiven Grade der Wurzeln y der Gleichung $\varphi = 0$; die folgenden gradbestimmenden Glieder dieser Gleichung, welche in (b) weggelassen sind, liefern die Grade von y, welche Null oder negativ sind.

Wenn nun $h_1, h_2, \ldots h_\gamma$ die in der Reihe $h_1, h_2, \ldots h_i$ enthaltenen positiven Grade vorstellen, während die übrigen Grade $h_{\gamma+1}\ h_{\gamma+2} \ldots h_i$ Null oder negativ sind, und wenn, wie früher, die Gleichung $\varphi = 0$, nach y auf-

gelöset, r_1 Wurzeln vom Grade h_1 u. s. f. darbietet; so wird die nämliche Gleichung, nach x aufgelöset, $r_1 h_1$ Wurzeln vom Grade $\frac{1}{h_1}$, $r_2 h_2$ vom Grade $\frac{1}{h_2}$, ... $r_\gamma h_\gamma$ Wurzeln vom Grade $\frac{1}{h_\gamma}$ darbieten; ihre übrigen Wurzeln aber, wenn es deren giebt, sind vom Grade Null, oder von negativen Graden.

Denn man hatte vorhin, um den Grad s von x in y zu bestimmen, $(b_{t_v} - b_{t_{v'}})s = t_v - t_{v'}$ und $\sigma = b_{t_v} - b_{t_{v'}}$, wo σ die Anzahl der Wurzeln x vom Grade s ist. Eben so hat man zur Bestimmung von h: $(t_v - t_{v'})h = b_{t_v} - b_{t_{v'}}$ und $r = t_v - t_{v'} =$ Anzahl der Wurzeln vom Grade h; folglich $\sigma = rh$ und $s = \frac{1}{h}$. Hiermit ist der递Haupttheil des Satzes bewiesen, und das Uebrige leuchtet ein, weil die Vergleichung der Glieder $(\dot{y}^{n})x^{b_0}$ und der folgenden bis $(\dot{y}^{n})$ für die Grade nur negative Werthe oder Null geben kann.

Denken wir uns also das vorgelegte System $f = (x^{a_0})y^m + \ldots + (x^{a_m}) = 0$, $\varphi = (x^{b_0})y^n + \ldots + (x^{b_n}) = 0$ durch Anordnung nach x übergehend in $f = (y^{\alpha_0})x^\mu + (y^{\alpha_1})x^{\mu-1} + \ldots + (y^{\alpha_\mu}) = 0$, $\varphi = (y^{\beta_0})x^\nu + (y^{\beta_1})x^{\nu-1} + \ldots + (y^{\beta_\nu}) = 0$. Es wird angenommen, dass (x^{a_0}) und (x^{b_0}) keinen Factor gemein haben; damit aber auch (y^{α_0}) und (y^{β_0}) nicht beide durch y theilbar seien, muss noch entweder $\mu = a_m$, oder $\nu = b_n$ sein; es sei also $\mu = a_m$, während b_n gleich ν oder auch kleiner als ν ist; ferner muss noch $\alpha_\mu = m$, oder $\beta_\nu = n$ sein, denn fände keins von beiden Statt, so wären (x^{a_0}) und (x^{b_0}) beide durch x theilbar.

Da $\mu = a_m$, so hat die Gleichung $f = 0$ keine Wurzeln y von negativen Graden; von den Wurzeln y' von $\varphi = 0$ seien $h_1, h_2 \ldots h_\gamma$ die positiven Grade, die übrigen Grade $h_{\gamma+1}, h_{\gamma+2}, \ldots h_i$ sind der erste Null oder negativ, die folgenden alle negativ. Ist nun h einer der Grade $h_1, h_2 \ldots h_\gamma$, so ist $k = (m-t)h + a_t$ der Grad, den f erhält, wenn darin für y eine Wurzel y von $\varphi = 0$ vom Grade x gesetzt wird; t ist ein gehörig zu wählender Zeiger aus der Reihe $0, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{j-1}, m$, welche den gradbestimmenden Gliedern von f entspricht. Ist hingegen $h = 0$ oder negativ, so ist offenbar $k = a_m = \mu$. Hieraus ergiebt sich für den Grad der Endgleichung in x: $g = mb_0 + r_1 k_1 + \ldots + r_i k_i$ oder $g = mb_0 + r_1((m - t_1)h + a_{t_1}) + r_2((m - t_2)h + a_{t_2}) \ldots \ldots + r_\gamma((m - t_\gamma)h_\gamma + a_{t_\gamma}) + (r_{\gamma+1} + r_{\gamma+2} + \ldots r_i)a_m$. Die Anzahl der Wurzeln von nicht positiven Graden ist aber β_0, also $r_{\gamma+1} + \ldots + r_i = \beta_0$; folglich ist

$$g = mb_0 + \mu\beta_0 + r_1((m - t_1)h + a_{t_1}) + \ldots + r_\gamma((m - t_\gamma)h_\gamma + a_{t_\gamma})$$

Andrerseits theilen sich die Wurzeln x von $\varphi = 0$, wie gezeigt ist, in $r_1 h_1$ vom Grade $\frac{1}{h}$, ... $r_\gamma h_\gamma$ vom Grade $\frac{1}{h_\gamma}$; die Grade der übrigen Wurzeln, wenn es deren giebt, sind alle Null, wenn $a_\mu = m$, hingegen Null oder negativ, wenn $a_\mu < m$. Nun sieht man aber sofort, dass, wenn $(m-t)\,h + a_t$ den Grad von f für einen Werth von y in x vom Grade h ausdrückt, $a_t.\frac{1}{h} + m - t$ der Grad von f für einen Werth von x in y vom Grade $\frac{1}{h}$ sein wird, wo t dieselbe Zahl ist, wie vorher; ferner wird für eine Wurzel x, deren Grad Null oder negativ ist, der Grad von f in y gleich m, wenn $a_\mu = m$; ist $a_\mu < m$, so muss $\beta_\nu = n$ sein; alsdann hat $\varphi = 0$ keine Wurzeln x von negativen Graden, und die Wurzeln vom Grade Null geben immer den Grad von f gleich m. Bemerkt man noch, dass die Anzahl der Wurzeln x von $\varphi = 0$, deren Grad Null oder negativ, gleich b_0 ist, so ergiebt sich für den Grad der Endgleichung in y der Werth:

$$g' = \mu\beta_0 + r_1 h_1 \{a_{t_1}.\frac{1}{h_1} + m - t_1\} + r_2 h_2 \{a_{t_2}.\frac{1}{h_2} + m - t_2\} \dots\dots$$
$$+ r_\gamma h_\gamma \{a_{t_\gamma}.\frac{1}{h_\gamma} + m - t_\gamma\} + m b_0,$$

welcher dem vorstehenden Werthe von g gleich ist; w. z. b. w.

Man kann noch wünschen, in allen Fällen die Anzahl der endlichen Lösungen zu bestimmen, welche das System zulässt. Es ist auf besondere Relationen, welche zwischen den Zahlen-Coëfficienten der vorgelegten Gleichungen bestehen können, in gegenwärtigem Artikel bisher keine Rücksicht genommen; soll dies geschehen, so ist zu erwägen, dass es Systeme giebt, wie $f + \mu\varphi^s = 0$ (wo s eine ganze Zahl und μ ein numerischer Coëfficient ist), welche dem vorgelegten Systeme $f = 0$, $\varphi = 0$ gleichbedeutend sind, und dass man zwischen solchen eine Wahl treffen muss, um durch die Formel $\psi x = 0$ die wahre Endgleichung in x zu erhalten. Um Schwierigkeiten dieser Art zu vermeiden, denke man sich die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ so beschaffen, dass es unmöglich sei, einen Exponenten s und einen Coëfficienten μ (der auch eine ganze Function von x oder y sein kann) so zu bestimmen, dass, während die eine Gleichung $\varphi = 0$ bleibt und die andere in $f + \mu\varphi^s = 0$ sich verwandelt, in

Hinsicht auf die eine der Grössen x oder y von niedrigerem Grade sei als f, ohne zugleich in Hinsicht der andern den Grad von f zu überschreiten. Mit andern Worten: wenn durch Hinzufügung von $\mu\varphi'$ der Grad von f nach x (oder y) erniedrigt werden kann, ohne zugleich in Hinsicht auf y (oder x) erhöht zu werden; so vollziehe man diese Reduction, bis ihre Fortsetzung unmöglich wird. Noch muss vorausgesetzt werden, dass die beiden Gleichungen keinen gemeinschaftlichen Factor haben; denn hätten sie einen, der z. B. y enthielte, so bliebe x offenbar unbestimmt, indem alsdann für jedes x sich y so bestimmen liesse, dass f und φ beide Null würden.

Es sei nun g der Grad der Endgleichung in x, berechnet nach der im 22. Bande dieses Journals gegebenen Regel, mit Berücksichtigung der Zahlencoëfficienten in f und φ, wie daselbst angedeutet ist; es sei ferner g' der Grad der Endgleichung in y, die aus $f=0$, $\varphi=0$ hervorgeht, nach derselben Regel berechnet; endlich sei g'' der Grad der Endgleichung in x des Systems $f+\delta y^m + \varepsilon x^\mu = 0$, $\varphi = 0$, wo δ und ε zwei unbestimmte Constanten sind und μ den Grad von f nach x, so wie m den nach y bezeichnet (der Grad g'' muss ebenfalls nach der genannten Regel berechnet werden): so ist g'' auch der Grad der Endgleichung in y des Systems $f+\delta y^m+\varepsilon x^\mu=0$, $\varphi=0$. Denn durch die Glieder $\delta y^m+\varepsilon x^\mu$ sind die gemeinschaftlichen Factoren der Coëfficienten der höchsten Potenzen von x und y in den nach x und nach y geordneten Gleichungen weggeschafft, und alsdann sind die Grade der Endgleichungen in x und in y gleich. Dieses vorausgesetzt, wird die Anzahl der endlichen Lösungen des Systems $f=0$, $\varphi=0$ durch $g+g'-g''$ ausgedrückt. Denn das System $f+\delta y^m+\varepsilon x^\mu=0$, $\varphi=0$ hat g'' endliche Lösungen; wird aber $\delta=0$ und $\varepsilon=0$ gesetzt, so werden $g''-g$ Werthe von x und $g''-g'$ Werthe von y unendlich gross; und da es unmöglich ist, dass unendlich grosse Werthe von x und y zugleich dem Systeme $f=0$, $\varphi=0$ Genüge leisten, so sind $g''-g+g''-g'$ Lösungen verloren gegangen und es bleiben nur $g+g'-g''$, sämmtlich endliche Lösungen des Systems $f=0$, $\varphi=0$ übrig.

2.

Nuove applicazioni del Calcolo Integrale relative alla quadratura delle Superficie curve, e cubatura de solidi.

Memoria

(Dal Sign. D. Barnaba Tortolini, Professore di Matematiche trascendenti a l'Università di Roma.)

1. In questa Memoria verrò a considerare tre particolari superficie del quarto ordine, le quali sono il luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' ellissoide, e delle due iperboloidi sui piani tangenti. La dipendenza di queste tre nuove superficie dotate di centro commune da quelle del secondo ordine rende interessante l'esame delle loro proprietà; quindi è che avendo ricercato l'espressioni della loro quadratura, e cubatura son giunto a riconoscere, che il più delle volte dipendono dalle funzioni ellittiche delle tre note specie. Tal' è cio che verrò successivamente ad esporre dopo di aver brevemente indicato un noto metodo per stabilire l'equazioni delle loro superficie. Le presenti ricerche formeranno un seguito ad altre di già publicate in una precedente Memoria *), ove ho parlato della rettificazione di due curve del quarto ordine, luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' ellissi, e dell' iperbola sulle sue tangenti. Del resto nella redazione di questa nuova Memoria ho profittato di un qualche utile consiglio, che il Chiar^mo^ Sig^r^ Professor *Dirichlet* si è compiaciuto di darmi a viva voce nella scorso 7bre.

2. Sieno pertanto x', y', z' le coordinate ortogonali di un punto qualunque di una superficie del secondo ordine dotata di centro, e prese nella direzione dei semiassi principali con l'origine al centro. Se per quel punto si

*) Giornale Arcadico 7bre 1844.

concepisca un piano tangente, del quale le coordinate di un suo punto qualunque sieno x, y, z noi avremo due equazioni della forma

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2=1, \qquad Axx'+Byy'+Czz'=1.$$

Per determinare l'equazione generale delle superficie luogo geometrico della projezione ortogonale del centro sui piani tangenti, dovremo prendere l'equazioni di una retta perpendicolare abbassata dal centro sulla direzione dei piani tangenti, e far coesistere le precedenti equazioni alle nuove per i medesimi valori delle coordinate x, y, z dopo l'eliminazione delle x', y', z' communi alle superficie del secondo ordine ed al piano tangente. Ora l'equazioni di questa perpendicolare sono evidentemente comprese nelle frazioni

$$\frac{Ax'}{x}=\frac{By'}{y}=\frac{Cz'}{z},$$

le quali ci daranno egualmente

$$\frac{Ax'}{x}=\frac{By'}{y}=\frac{Cz'}{z}=\frac{Axx'+Byy'+Czz'}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

d'onde

$$x'=\frac{x}{A(x^2+y^2+z^2)}, \quad y'=\frac{y}{B(x^2+y^2+z^2)}, \quad z'=\frac{z}{C(x^2+y^2+z^2)}$$

Se questi valori si sostituiscano nell' equazione generale delle superficie del secondo ordine, otterremo

$$(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}.$$

Tal' è l'equazione delle superficie in questione: secondo la diversità dei segni delle tre costanti A, B, C si avranno tre superficie del quarto ordine di forme distinte, dotate di centro, e limitate in tutte le direzioni.

3. Si prenda in particolare l'ellissoide della consueta equazione

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1,$$

avremo per il luogo geometrico della projezione del centro sui piani tangenti, l'equazione

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

Questa superficie dotata di centro, e limitata in tutte le direzioni passa altresì per i vertici degli assi principali $2a$, $2b$, $2c$ dell' ellissoide. Le sezioni principali, le quali si ottengono dalla successiva supposizione di $x=0$, $y=0$, $z=0$ non sono altro, che altrettante curve del quarto ordine, luogo geometrico

della projezione ortogonale del centro di tre elissi sezioni principali dell ellissoide, sulle sue tangenti. Tutte le altre sezioni parallele ai tre piani coordinati saranno curve ovali del quarto ordine. Volendo far uso delle coordinate polari r, p, q congiunte alle ortogonali x, y, z per mezzo delle consuete formole

$$x = r\cos p,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,p\cos q,\quad z = r\,\mathrm{sen}\,p\,\mathrm{sen}\,q$$

avremo per la sua equazione polare

$$r^2 = a^2\cos^2 p + b^2\mathrm{sen}^2 p\cos^2 q + c^2\mathrm{sen}^2 p\,\mathrm{sen}^2 q.$$

Di questa, è, che noi faremo particolarmente uso per calcolare l'espressione analitica della superficie, e del volume.

4. In un' iperboloide da due falde si hà

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = -1$$

quindi è che la superficie luogo geometrico della projezione del centro sui piani tangenti avrà per equazione

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = c^2z^2 - a^2x^2 - b^2y^2.$$

La forma di questa superficie dotata di centro, e limitata in tutte le direzioni, è simile a quelle, che nelle figura curvilinee ha la Lemniscata: di più il centro della superficie è un punto doppio della stessa superficie, ove passeranno due piani tangenti. Per le sezioni principali nei piani xz, yz otteniamo due Lemniscate

$$(x^2+z^2)^2 = c^2z^2 - a^2x^2,\qquad (y^2+z^2)^2 = c^2z^2 - b^2y^2$$

le quali sono il luogo geometrico della projezione del centro di due iperbole sulle sue tangenti; queste iperbole sono d'altronde due sezioni principali dell' iperboloide da due falde: infine per la sezione principale nel piano xy, si avrà la curva imaginaria

$$(x^2+y^2)^2 = -a^2x^2 - b^2y^2,$$

ciò che prova essere il centro un punto, dal quale partono due superficie chiuse eguali, e simile fra di loro. È assai facile di provare, che gl'angoli α, β, γ formati dal piano tangente la superficie nel centro con i tre piani yz, xz, xy sono determinati per il doppio sistema di valori

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\ \cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\ \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

e percio il centro è un punto doppio. Segando la nostra superficie con dei piani paralleli ai coordinati si ottengono delle curve del quarto ordine

composte o di due ovali eguali, e simili, e separate fra di loro di un certo intervallo, od' anche di una sola ovale: queste curve saranno somiglianti alla doppia specie dell' Elissi Cassiniana.

Finalmente prendendo

$$z = r \cos p, \qquad x = r \operatorname{sen} p \cos q, \qquad y = r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q,$$

avremo l'equazione polare

$$r^2 = c^2 \cos^2 p - a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q$$

della quale noi faremo egualmente uso nella ricerca della quadratura, e cubatura.

In un iperboloide da una falda, e di equazione

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

si trova per la corrispondente superficie projezione del centro sui piani tangenti

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2.$$

Cercando le sezioni principali di questa superficie dotata di centro, e limitata in tutte le direzioni si troverà per la supposizione di $x=0$, $y=0$, $z=0$,

$$(y^2+z^2)^2 = b^2y^2-c^2z^2, \quad (x^2+z^2)^2 = a^2x^2-c^2z^2, \quad (x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2,$$

le prime due appartengono a due lemniscate, luogo geometrico della projezione del centro delle due iperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sulle tangenti, come la terza sarà la curva projezione del centro dell' ellissi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sulle tangenti. Intersecando poi la superficie con dei piani paralleli ai coordinati si ottengono altrettante curve del quarto ordine composte di una, o di più ovali. Qui pure il centro della superficie è un punto multiplo, e gli angoli α, β, γ formati dal piano tangente con i piani coordinati sono determinati da formole del tutto simili a quelle di già stabilite per la superficie proveniente dall' iperboloide da due falde. Adoprando in fine la sostituzione

$$z = r \cos p, \qquad x = r \operatorname{sen} p \cos q, \qquad y = r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q$$

ottereno l'equazione polare

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q - c^2 \cos^2 p,$$

la quale verrà applicata nell' espressioni generali della quadratura, e cubatura.

5. Sieno ora $x, y, z,$ le coordinate ortogonali di un punto qualunque di una superficie curva, e chiamando $r, p, q,$ le coordinate polari si prenda

$$x = r\cos p, \qquad y = r \operatorname{sen} p \cos q, \qquad z = r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q.$$

Se si consideri il raggio r funzione dei due angoli $p, q,$ allora la quadratura di una superficie determinata dall' equazione polare

$$F(r, p, q) = 0$$

dipende, come si sà dall' integrale doppio

$$S = \iint r\,dp\,dq \sqrt{[r_{,}^2 + (r^2 + r'^2) \operatorname{sen}^2 p]},$$

ove r', $r_{,}$ sono le derivate parziali del raggio r rapporto agli angoli $p, q,$ e per brevità porremo

$$R = \sqrt{[r_{,}^2 + (r^2 + r'^2) \operatorname{sen}^2 p]}.$$

I limiti dell' integrale si desumono dalla condizione che de ve soddisfare l'equazione della superficie.

Consideriamo adunque la superficie del quarto ordine

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$

e che in coordinate polari avrà per equazione

$$r^2 = a^2 \cos^2 p + b^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + c^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q.$$

Eseguendo le derivazioni parziali rapporto a p e q otteniamo

$$r' = \frac{(b^2 \cos^2 q + c^2 \operatorname{sen}^2 q - a^2) \operatorname{sen} p \cos p}{r}$$

$$r_{,} = \frac{(c^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen} q \cos q}{r}$$

e ricaviamo con facilità

$$R = \frac{\operatorname{sen} p\,(a^4 \cos^2 p + b^4 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + c^4 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q)^{\frac{1}{2}}}{r}$$

quindi l'integrale doppio diverrà

$$S = \iint \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(a^4 \cos^2 p + b^4 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + c^4 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q)}.$$

I limiti dell' integrale relativi a p e q cio è

$$p = 0, \qquad p = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad q = 0, \qquad q = \tfrac{1}{2}\pi$$

porgono l'ottava parte della superficie, e perciò l'intera quadratura sarà data

dall' integrale definito

$$S = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{sen}\,p\,dp\,dq\,\sqrt{(a^4u^2+b^4v^2+c^4\omega^2)}$$

ove per brevità si pone

$$u = \cos p, \quad v = \mathrm{sen}\,p\cos q, \quad \omega = \mathrm{sen}\,p\,\mathrm{sen}\,q.$$

Sarà utile qui di osservare che questo integrale esprime la quadratura di una ellissoide, della quale i nuovi semiassi principali sono funzioni dei semiassi a, b, c. Infatti chiamando α, β, γ, i semiassi principali di un' ellissoide, sappiamo, che la sua quadratura vien data dall' integrale definito

$$S_1 = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{sen}\,p\,dp\,dq\,\sqrt{(\beta^2\gamma^2u^2+\alpha^2\gamma^2v^2+\alpha^2\beta^2\omega^2)}.$$

Se dunque si prenda in un caso particolare

$$\alpha = \frac{bc}{a}, \quad \beta = \frac{ac}{b}, \quad \gamma = \frac{ab}{c}$$

si avrá

$$\beta^2\gamma^2 = a^4, \quad \alpha^2\gamma^2 = b^4, \quad \alpha^2\beta^2 = c^4, \quad \alpha\beta\gamma = abc,$$

d'onde il valore di S_1 si ridurra a quello di S, e potremo concludere, che l'intera superficie del quarto ordine rappresentata dall' equazione

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

è eguale all' intera superficie dell' ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{\left(\frac{bc}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{ac}{b}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{ab}{c}\right)^2} = 1.$$

Di più questa nuova ellissoide, e quella di semiassi a, b, c sono eguali in volume.

Veniamo ora a riconoscere l'effettivo valore di S. Si sà che la quadratura di un ellissoidi di semiassi principali α, β, γ ove sia $\gamma<\beta<\alpha$, ed in sieme

$$\cos\mu = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \varkappa^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)}{\beta^2(\alpha^2-\gamma^2)}$$

vien espressa per

$$S_1 = 2\pi\gamma^2+\frac{2\pi\alpha^2\beta}{\sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)}}\left[\cos^2\mu\,F(\varkappa,\mu)+\mathrm{sen}^2\mu\,E(\varkappa,\mu)\right]$$

nella quale $F(\varkappa,\mu)$, $E(\varkappa,\mu)$ sono le due funzioni ellittiche di prima e seconda specie di ampiezza μ, e di modulo $\varkappa<1$. Nel nostro caso per la

sostituzione dei valori di α, β, γ avremo

$$\cos\mu = \frac{a^2}{c^2}, \quad \varkappa^2 = \frac{c^4-b^4}{c^4-a^4}, \quad ed\ a < b < c,$$

e perciò la quadratura dell' indicata superficie del quarto ordine si esprimerà per

$$S = \frac{2\pi a^2 b^2}{c^2} + \frac{2\pi c^4}{\sqrt{(c^4-a^4)}}\left[\cos^2\mu F(\varkappa, \mu) + \operatorname{sen}^2\mu E(\varkappa, \mu)\right].$$

Quando $a = b = c$, la nostra superficie si riduce a quella di una sfera, ed allora $\varkappa = 1$, $\mu = 0$, per cui

$$F(\varkappa, \mu) = \int_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu}\right) = 0.$$

$$E(\varkappa, \mu) = \int_0^\gamma d\varphi\cos\varphi = \operatorname{sen}\mu = 0, \quad \sqrt{(c^4-a^4)} = c^2\operatorname{sen}\mu = 0$$

d'onde osservando, che per $\mu = 0$

$$\lim \frac{1}{\operatorname{sen}\mu}\log\left(\frac{1+\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu}\right) = 1,$$

verrà

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2.$$

6. Supponiamo adesso $b = a$, risulterà egualmente

$$\varkappa = 1, \quad F(\varkappa, \mu) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\mu}\right). \quad E(\varkappa, \alpha) = \operatorname{sen}\mu,$$

d'onde facendo

$$\sqrt{(c^4-a^4)} = c^2 \operatorname{sen} a = c^2\varepsilon)$$

si ricaverá

$$S = 2\pi c^2 + \frac{\pi a^4}{c^2\varepsilon}\log\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

Tal' è la superficie generata dalla rotazione della curva del quarto ordine

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + c^2y^2$$

attorno l'asse delle x per $a < c$. La medesima superficie eguaglia quella di un' ellissoide di rivoluzione generata dalla ratazione dell' ellissi

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2} = 1$$

attorno l'asse mindre $\frac{a^2}{c}$. Supponendo poi $b = c$. e ritenendo

$$\sqrt{(c^4-a^4)} = c^2\varepsilon$$

avremo

$$S = 2\pi a^2 + \frac{2\pi c^2}{\varepsilon}\operatorname{arctang}\left(\frac{c^2\varepsilon}{a^2}\right).$$

Il secondo membro di questa equazione rappresentirà la superficie generata dalla rivoluzione della curva del quarto ordine

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+c^2y^2$$

attorno l'asse delle ordinate. Il medesimo valore di S rappresenta la superficie generata dalla rotazione dell' ellissi

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$$

attorno l'asse maggiore $\frac{c^2}{a}$.

7. Al medesimo valore di S ottenuto nel parag. 5. si può anche giungere facendo l'integrazione diretta rapporto a p, e q, per qualcuno dei metodi già noti ai Geometri. Quantunque si renda qui superfluo di eseguire questa ricerca, contutto ciò non sarà inutile di indicare brevemente un metodo, il quale consiste nella sostituzione di nuove variabili θ, ω invece di p, q, ed atte a togliere l'irrazionalità: ciò che poi dovremo necessariamente fare, quando si voglia calcolare il volume terminato della stessa superficie.

Sia dunque

$$u = \cos p,\quad v = \operatorname{sen} p \cos q,\quad w = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q,$$
$$\zeta = \cos\theta,\quad \eta = \operatorname{sen}\theta\cos\omega,\quad \xi = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega,$$

ed insieme

$$A = a^2,\quad B = b^2,\quad C = c^2,$$

e supponiamo, che fra i quattro angoli p, q, θ, ω sussistano le relazioni

$$\zeta = \frac{Au}{\sqrt{(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)}},\quad \eta = \frac{Bv}{\sqrt{(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)}}$$
$$\xi = \frac{Cw}{\sqrt{(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)}}$$

Da queste formole si ricavano reciprocamente i valori di u, v, w in funzione di ζ, η, ξ, in modo, che ponendo

$$P = \sqrt{(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)},\quad Q = \sqrt{\left(\frac{\zeta^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\xi^2}{C^2}\right)}$$

si hà primieramente $PQ = 1$, e quindi

$$u = \frac{\zeta}{AQ},\quad v = \frac{\eta}{BQ},\quad w = \frac{\xi}{CQ},$$

la prima delle quali porge

$$\cos p = \frac{\cos\theta}{A\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{A^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\omega}{B^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\omega}{C^2}\right)}},$$

e le due ultime danno

$$\operatorname{tang} q = \frac{B}{C}\operatorname{tang}\omega.$$

È interessante di osservare, che ai limiti

$$p = 0,\quad p = \tfrac{1}{2}\pi,\quad q = 0,\quad q = \tfrac{1}{2}\pi$$

corrispondono egualmente i limiti

$$\theta = 0,\quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi,\quad \omega = 0,\quad \omega = \tfrac{1}{2}\pi$$

Per determinare qual sia l'elemente differenziale da sostituirsi a sen $p\,dp\,dq$, converrà differenziare il valore di $\cos p$ nella suppositione di q costante, o ciò che torna lo stesso nella supposizione di ω costante, ed avremo simultaneamente

$$\operatorname{sen} p\,dp = \frac{(B^2\operatorname{sen}^2\omega + C^2\cos^2\omega)\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{A B^2 C^2\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{A^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\omega}{B^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\omega}{C^2}\right)^3}}$$

$$dq = \frac{BC\,d\omega}{(B^2\operatorname{sen}^2\omega + C^2\cos^2\omega)},$$

è perciò all' elemento sen $p\,dp\,dq$ si dovrà sostituire il nuovo elemento

$$\frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\omega}{ABC\;Q^3}$$

d'onde l'integrale definito S rapporto agli angoli p, q del parag. 5. diverrà

$$S = \frac{8}{ABC}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\omega}{Q^4}$$

ossia

$$S = \frac{8}{ABC}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\omega}{\left(\frac{\cos^2\theta}{A^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\omega}{B^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\omega}{C^2}\right)^2}.$$

In questa guisa si è tolta l'irrazionalità dal nostro integrale, e sarà assai facile di eseguire una prima integrazione rapporto ad una delle variabili θ, ω. Queste trasformazioni spesso adoprate dai geometri, unitamente a differenti altre trovansi esposte in una delle Memorie del Sig^r^ *Jacobi* inserita nel tom. 10. di questo giornale. Si rende più utile di eseguire l'integrazione rapporto ad

ω, per cui fatto primieramente

$$\alpha^2 = C^2(B^2 \cos^2\theta + A^2 \operatorname{sen}^2\theta), \qquad \beta^2 = B^2(C^2 \cos^2\theta + A^2 \operatorname{sen}^2\theta)$$

si avrà

$$S = 8\,A^2B^2C^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\operatorname{sen}^2\omega)^2}$$

Ora dai noti metodi d'integrazione si trova con facilità

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\operatorname{sen}^2\omega)^2} = \tfrac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{\alpha\beta^3} + \frac{1}{\beta\alpha^3}\right)$$

e perciò

$$S = 2\,A^2B^2C^2\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\alpha\beta^3} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\beta\alpha^3}\right]$$

È facile di trasformare gli integrali del secondo membro in trascendenti ellittici; supponiamo infatti che fra le tre quantità A, B, C sussista $A<B<C$ ciò che è lecito, e sia

$$\cos\mu = \frac{A}{C}, \qquad \cos\nu = \frac{A}{B}, \qquad \varkappa^2 = 1 - \frac{\operatorname{tang}^2\nu}{\operatorname{tang}^2\mu} = \frac{C^2-B^2}{C^2-A^2},$$

e sostituiamo

$$\cos\theta = \cot\mu \operatorname{tang}\varphi, \qquad \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{\cot\mu\, d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

quindi osservando che ai limiti

$$\theta = 0, \qquad \theta = \tfrac{1}{2}\pi$$

corrisponde

$$\varphi = \mu, \qquad \varphi = 0,$$

e facendo

$$\Delta = \sqrt{(1 - \varkappa^2\operatorname{sen}^2\varphi)},$$

si otterrà

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{(C^2-A^2)}}\left[C^2\int_0^{\mu}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} + B^2\int_0^{\mu}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}\right].$$

Sia ora $\varkappa'$ il complemento del modulo $\varkappa<1$, ciò che darà

$$\varkappa'^2 = \frac{\operatorname{tang}^2\nu}{\operatorname{tang}^2\mu} = \frac{B^2-A^2}{C^2-A^2},$$

ed adottando le notazioni di Legendre per le funzioni ellittiche di prima, e seconda specie col porre

$$F(\varkappa, \varphi) = \int\frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad E(\varkappa, \varphi) = \int d\varphi\,\Delta$$

abbiamo *)

$$\int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\varDelta} = \frac{1}{x^2}\Big(E(x,\varphi) - x'^2 F(x,\varphi)\Big),$$

$$\int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\varDelta^3} = \frac{1}{x^2}\Big(F(x,\varphi) - E(x,\varphi)\Big) + \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\varDelta};$$

osservando in fine che ai limiti $\varphi = \mu$, $\varphi = 0$, si hà

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\varDelta} = \frac{A\sqrt{(C^2 - A^2)}}{BC}$$

troveremo

$$S = \frac{2\pi AB}{C} + \frac{2\pi C^2}{\sqrt{(C^2 - A^2)}}\Big(\cos^2\mu F(x,\mu) + \operatorname{sen}^2\mu E(x,\mu)\Big).$$

Quest' espressione coincide con quelle di già trovata al parag. 5. per la sola sostituzione di

$$A = a^2, \qquad B = b^2, \qquad C = c^2.$$

Per calcolare il volume terminato dalla medesima superficie prenderemo la formola generale della cubatura dei solidi in coordinate polari, la quale è

$$V = \tfrac{1}{3}\iint r^3 \operatorname{sen} p\, dp\, dq\,.$$

Nel nostro caso

$$r^2 = a^2\cos^2 p + b^2\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q + c^2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q,$$

d'onde prendendo l'integrale entro i soliti limiti, e moltiplicando per 8, otterremo l'intero volume

$$V = \tfrac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} p\, dp\, dq\, \sqrt{(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)^3}.$$

Qui pure l'irrazionalità si toglie per una sostituzione del tutto simile all' antecedente in modo, che ritenendo

$$u = \cos p, \quad v = \operatorname{sen} p\cos q, \quad w = \operatorname{sen} p\operatorname{sen} q,$$
$$\zeta = \cos\theta, \quad \eta = \operatorname{sen}\theta\cos\omega, \quad \xi = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega,$$

si porrà

$$\zeta = \frac{au}{\sqrt{(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)}}, \quad \eta = \frac{bv}{\sqrt{(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)}}, \quad \xi = \frac{cw}{\sqrt{(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)}},$$

d'onde facendo

$$P = \sqrt{(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2)}, \qquad Q = \sqrt{\left(\frac{\zeta^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\xi^2}{c^2}\right)}$$

---

*) Legendre. Fonctions elliptiques Tom. I. pag. 257.

si hà come sopra $PQ = 1$, ed insieme

$$u = \frac{\zeta}{aQ}, \quad v = \frac{\eta}{bQ}, \quad \omega = \frac{\xi}{cQ}, \quad \operatorname{tang} q = \frac{b}{c} \operatorname{tang} \omega.$$

Con queste diverse formole calcolando l'elemento differenziale $\operatorname{sen} p\, dp\, dq$, e facendo l'intera sostituzione e di più ponendo per brevità

$$\alpha^2 = c^2(b^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta), \qquad \beta^2 = b^2(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)$$

avremo

$$V = \frac{8a^6 b^6 c^6}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2\omega + \beta^2 \operatorname{sen}^2\omega)^6}$$

I limiti delle nuove variabili coincidono con gli antecedenti. Sia

$$V_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2 \cos^2\omega + \beta^2 \operatorname{sen}^2\omega)^2},$$

si troverà facilmente dai noti metodi d'integrazione

$$V = \frac{\pi}{16}\left(\frac{3}{\alpha\beta^5} + \frac{3}{\beta\alpha^5} + \frac{2}{\alpha^3\beta^3}\right),$$

e perciò l'integrale doppio si ridurrà ad integrali semplici della forma

$$V = \frac{\pi a^6 b^6 c^6}{6}\left[3\int^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\alpha\beta^5} + 3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\beta\alpha^5} + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\alpha^3\beta^3}\right]$$

Qui anche faremo un cangiamento di variabile per poter ridurre più facilmente questi integrali a trascendenti ellittici. Sia $a < b < c$, e facciamo

$$\cos\mu = \frac{a}{c}, \quad \cos\nu = \frac{a}{b}$$

$$\left[\quad x^2 = 1 - \frac{\operatorname{tang}^2\nu}{\operatorname{tang}^2\mu} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}, \quad x'^2 = \frac{\operatorname{tang}^2\nu}{\operatorname{tang}^2\mu} = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}\right.$$

$$\cos\theta = \cot\mu \operatorname{tang}\varphi \qquad \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{\cot\mu\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \qquad \Delta = \sqrt{(1 - x^2 \operatorname{sen}^2\varphi)},$$

si ricaverà per l'intero volume

$$V = \frac{\pi\, 2^5}{6bc}\left[\frac{3}{\operatorname{sen}\mu \cos^4\mu \cos\nu}\int_0^{\mu} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Delta} + \frac{3}{\operatorname{sen}\mu \cos^5\nu}\int_0^{\mu} \frac{\cos^8\varphi\, d\varphi}{\Delta^5}\right.$$
$$\left. + \frac{2}{\operatorname{sen}\mu \cos^2\mu \cos^3\nu}\int_0^{\mu} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}\right]$$

Tali sono gli integrali, che si potranno ridurre a funzioni ellittiche di prima, e di seconda specie e che verremo ad esporre, dopo di aver verificato la nostra formola per alcuni casi particolari.

9. Sia per ipotesi $b = c$, avremo

$$\mu = \nu, \qquad x = 1, \qquad \cos\mu = \frac{a}{b},$$

d'onde

$$V = \frac{4\pi b^3}{3\,\mathrm{sen}\,\mu}\int_0^\mu \cos^4\varphi\, d\varphi.$$

Il secondo membro rappresenta il volume generato dall' area della curva piana

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

attorno l'asse minore 2a. Sostituendoci poi l'integrale

$$\int_0^\mu \cos^4\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{4}\mathrm{sen}\,\mu\,(\cos^3\mu + \tfrac{3}{2}\cos\mu) + \tfrac{3}{8}\mu,$$

avremo definitivamente

$$V = \tfrac{1}{6}\pi b^3\left(2\cos^3\mu + 3\cos\mu + \frac{3\mu}{\mathrm{sen}\,\mu}\right).$$

Che se alle linee trigonometriche si sostituiscano i valori dati per a, b, avremo anche

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\left[2a^3 + 3ab + \frac{3a^5}{6\sqrt{(b^2-a^2)}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{a}\right].$$

La medesima superficie del quarto ordine riduccsi ad una sfera per $a = b = c$, e si otterrà immediatamente per $\mu = 0$ da una qualunque di queste due espressioni il noto valore del volume sferico.

Prendendo adesso $a = b$ nella formola generale, sarà

$$\nu = 0, \qquad \varkappa = 1, \qquad \cos\mu = \frac{a}{c}, \qquad \cos\nu = 1$$

d'onde

$$V = \frac{\pi c^3}{6}\left[\frac{3}{\mathrm{sen}\,\mu}\left(\int_0^\mu \cos^3\varphi\, d\varphi + \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right) + \frac{2\cos^2\mu}{\mathrm{sen}\,\mu}\int_0^\mu \cos\varphi\, d\varphi\right].$$

Eseguendo queste diverse integrazioni si hà

$$V = \tfrac{1}{6}\pi c^3\left[2 + 3\cos^2\mu + \frac{3}{\mathrm{sen}\,\mu}\log\left(\frac{1+\mathrm{sen}\,\mu}{\cos\mu}\right)\right]$$

Sostituendo nuovamente, i valori di $\mathrm{sen}\,\mu$, $\cos\mu$, e ponendo

$$\sqrt{(c^2-a^2)} = c\varepsilon = c\,\mathrm{sen}\,\mu,$$

si avrà

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\left[\left(2c^3 + 3a^2c + \frac{3c^3}{2\varepsilon}\log\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]\right..$$

Ambedue l'espressioni si riducono alla sfera per $a = c$ e rappresentano il volume generato dalla rotazione dell' area della curva piana

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + c^2y^2$$

attorno l'asse maggiore $2c$; come si può verificare dalle note formole della cubatura dei solidi di rivoluzione.

10. Ritornando all' espressione generale ottenuta nel parag. 8. del volume terminato dalla superficie del quarto ordine

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

veniamo a mostrare la riduzione di quelli integrali a trascendenti ellittici. Indichiamo per brevità con le semplici lettere F, E le funzioni ellittiche di prima, e seconda specie di modulo $\varkappa$, e di ampiezza φ, e sia $\varkappa'$ il complemento del modulo, noi abbiamo dalla citata Opera di Legendre

$$\int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \frac{E-\varkappa'^2 F}{\varkappa^2}, \qquad \int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \frac{1}{\varkappa^2}(F-E)$$

$$\int\varDelta\, d\varphi\cos^2\varphi = \frac{\varDelta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3}+\frac{(1+\varkappa^2)E}{3\varkappa^2}-\frac{\varkappa'^2F}{3\varkappa^2}$$

Se il primo membro di quest' ultimo integrale si moltipliche, e divida per

$$\varDelta = \sqrt{(1-\varkappa^2\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

e si sostituisca $\operatorname{sen}^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$ si avrà evidentemente

$$\int\varDelta\, d\varphi\cos^2\varphi = \int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta}-\varkappa^2\int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta}+\varkappa^2\int\frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\varDelta}$$

d'onde

$$\int\frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \frac{1}{\varkappa^2}\int\varDelta\, d\varphi\cos^2\varphi-\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta},$$

e perciò dalla sostituzione dei stabiliti valori, si trova

$$\int\frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \frac{\varDelta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3\varkappa^2}+\frac{2(\varkappa^2-\varkappa'^2)E}{3\varkappa^4}+\frac{\varkappa'^2(2\varkappa'^2-\varkappa^2)F}{3\varkappa^4}$$

Che se nello stesso integrale si sostituissa $\cos^2\varphi = 1-\operatorname{sen}^2\varphi$, avremo

$$\int\varDelta\, d\varphi\cos^2\varphi = \int\varDelta\, d\varphi-\int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta}+\varkappa^2\int\frac{\operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi}{\varDelta}$$

dalla quale deduciamo a sostituzioni, e riduzioni eseguite,

$$\int\frac{\operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \frac{\varDelta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3\varkappa^2}-\frac{2(1+\varkappa^2)E}{3\varkappa^4}+\frac{(2+\varkappa^2)F}{3\varkappa^4}$$

Infine dal medesimo integrale abbiamo

$$\int\varDelta\, d\varphi\cos^2\varphi = \int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta}-\varkappa^2\int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta}$$

e perciò

$$\int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \frac{(2-\varkappa^2)E}{3\varkappa^4}-\frac{2\varkappa'^2F}{3\varkappa^4}-\frac{\varDelta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3\varkappa^2}$$

Per calcolare gli altri integrali, i quali si trovano nell' espressione generale di V, e che contengono le potenze di $\varDelta$ superiori alla prima, poniamo

successivamente

$$\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^3} = \frac{A\cos^2\varphi}{\Delta^3} + \frac{B\cos^2\varphi}{\Delta}$$

e troveremo per i coëfficienti A, B,

$$B = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad A = -\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}$$

e quindi

$$\int\frac{\cos^4\varphi d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{\varkappa^2}\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\Delta} - \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\Delta^3}$$

Nella stessa guisa faremo

$$\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^5} = \frac{A}{\Delta^5} + \frac{B}{\Delta^3} + \frac{C}{\Delta},$$

e sarà

$$A = \frac{\varkappa'^4}{\varkappa^4}, \quad B = -\frac{2\varkappa'^2}{\varkappa^4}, \quad C = \frac{1}{\varkappa^4},$$

d'onde

$$\int\frac{\cos^4\varphi d\varphi}{\Delta^5} = \frac{\varkappa'^4}{\varkappa^4}\int\frac{d\varphi}{\Delta^5} - \frac{2\varkappa'^2}{\varkappa^4}\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} + \frac{1}{\varkappa^4}\int\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Ora fra le altre formole di riduzioni delle funzioni troviamo nell' Opera di Legendre

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{E}{\varkappa'^2} - \frac{\varkappa^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\varkappa'^2\Delta},$$

$$\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\Delta^3} = \frac{F-E}{\varkappa^2} + \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta^5} = \frac{2(1+\varkappa'^2)E}{3\varkappa'^4} - \frac{F}{3\varkappa'^2} - \frac{2\varkappa'^2(1+\varkappa'^2)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3\varkappa'^4\Delta} - \frac{\varkappa^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3\varkappa'^2\Delta^3},$$

quali sostituite insieme ad altre negli due ultimi integrali, ricaviamo

$$\int\frac{\cos^4\varphi d\varphi}{\Delta^3} = \frac{(1+\varkappa'^2)E}{\varkappa^4} - \frac{2\varkappa'^2 F}{\varkappa^4} - \frac{\varkappa'^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\varkappa^2\Delta},$$

$$\int\frac{\cos^4\varphi d\varphi}{\Delta^5} = \frac{2(\varkappa'^2-2)E}{3\varkappa^4} + \frac{(3-\varkappa'^2)F}{3\varkappa^4} - \frac{2(\varkappa'^2-2)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3\varkappa^2\Delta} - \frac{\varkappa'^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{3\varkappa^2\Delta^3}.$$

Tali sono le differenti formole, delle quali noi faremo uso adesso, e nel seguito di questa Memoria.

11. Gli Integrali, che trovansi nel secondo membro di V sono presi entro i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \mu$; la quantità

$$\Delta = \sqrt{(1-\varkappa^2\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

per il valore $\varphi = \mu$, e di $\varkappa$ stabiliti nel parag. 8. diviene

$$\Delta = \frac{b}{c} = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}$$

e per conseguenza

$$\int_0^\mu \frac{\cos^4\varphi d\varphi}{\varDelta} = \frac{\operatorname{sen}\mu\cos^3\mu}{3x^2\cos\nu} + \frac{2(x^2-x'^2)E}{3x^4} + \frac{x'^2(2x'^2-x^2)F}{3x^4},$$

$$\int_0^\mu \frac{\cos^4\varphi d\varphi}{\varDelta^3} = \frac{(1+x'^2)E}{3x^4} - \frac{2x'^2F}{x^4} - \frac{x'^2\operatorname{sen}\mu\cos\nu}{x^2},$$

$$\int_0^\mu \frac{\cos^4\varphi d\varphi}{\varDelta^5} = \frac{2(x'^2-2)E}{3x^4} + \frac{(3-x'^2)F}{3x^4} - \frac{x'^2\operatorname{sen}\mu\cos\nu}{3x^2\cos^2\mu} + \frac{2(x'^2-2)\operatorname{sen}\mu\cos\nu}{3x^2}.$$

Questi integrali sostituiti nell' indicato valore di V daranno dopo alcune riduzioni un risultato della forma

$$V = \frac{\pi abc}{6}\left(\frac{c^2+2(a^2+b^2)}{c^2}\right) + \frac{\pi b^4c^2}{6a^4}\left(\frac{H^2E+H_{,}^2F}{x^4\operatorname{sen}\mu}\right).$$

I coëfficienti H^2, $H_{,}^2$ sono

$$H^2 = 2\left[(x'^2-2)\cos^4\mu + (1-2x'^2)\cos^4\nu + (1+x'^2)\cos^2\mu\cos^2\nu\right]$$

$$H_{,}^2 = (3-x'^2)\cos^4\mu + x'^2(3x'^2-1)\cos^4\nu - 4x'^2\cos^2\mu\cos^2\nu.$$

Interessa di conoscere le forme che prendono ambedue questi coëfficienti espressi dalle sole quantità a, b, c. Eliminiamo pertanto i valori di $\cos\mu$, $\cos\nu$, x, x', si avrà primieramente

$$H^2 = 2a^4\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)b^4 + (a^2+c^2-b^2)c^4 - 2a^2b^2c^2}{b^4c^4(c^2-a^2)}\right).$$

Ordinando il numeratore rapporto alle potenze di c, si troverà divisibile per $(c^2-b^2)^2 = c^4 - 2b^2c^2 + b^4$, e perciò

$$H^2 = \frac{2a^4(c^2-b^2)^2(a^2+b^2+c^2)}{b^4c^4(c^2-a^2)},$$

e riflettendo al valore di x^2 si avrà in fine

$$\frac{H^2}{x^4} = \frac{2a^4(c^2-a^2)(a^2+b^2+c^2)}{b^4c^4}.$$

Similmente per il coëfficiente $H_{,}^2$ abbiamo

$$H_{,}^2 = \frac{a^4}{b^4c^4(c^4-a^2)^2}[(3c^2-2a^2-b^2)(c^2-a^2)b^4 + (b^2-a^2)(3b^2-2a^2-c^2)c^4 \\ -4(b^2-a^2)(c^2-a^2)b^2c^2]$$

quale egualmente ordinata rapporto a, c è divisibile per $(c^2-b^2)^2$, per cui

$$H_{,}^2 = \frac{a^4(c^2-b^2)^2[(a^2+b^2+c^2)a^2+a^4-b^2c^2]}{b^4c^4(c^2-a^2)^2}$$

ossia

$$\frac{H_{,}^2}{x^4} = \frac{a^4[(a^2+b^2+c^2)a^2+a^4-b^2c^2]}{b^4c^4},$$

dunque in fine ponendo

$$K = (c^2-a^2)(a^2+b^2+c^2), \qquad K_{,} = (a^2+b^2+c^2)a^2+a^4-b^2c^2,$$

e rappresentando nuovamente per

$$F(\varkappa,\ \mu), \qquad E(\varkappa,\ \mu)$$

le due funzioni ellittiche incomplete di prima, e seconda specie, otterremo

$$V = \frac{\pi abc}{6}\left(\frac{c^2 + 2(a^2 + b^2)}{c^2}\right) + \frac{2\pi K E(\varkappa,\ \mu)}{6c \operatorname{sen}\mu} + \frac{\pi K_{\prime} F(\varkappa,\ \mu)}{6c \operatorname{sen}\mu}.$$

È assai facile di verificare l'esattezza di questa espressione per i differenti casi particolari di $b = c$, di $b = a$, e di $a = b = c$; concluderemo adunque, che la cubatura del volume terminato dalla superficie

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

dipende dalle funzioni ellittiche incomplete di prima, e seconda specie. Noi termineremo di parlare di questa superficie, coll' avvertire che d'essa incontrasi in alcune questioni di Fisica-matematica, e rappresenta precisamente nell' Ottica, la superficie di elasticità.

12. Projettando il centro dell' iperboloide da due falde sui piani tangenti, fù veduto, che l'equazione polare della superficie, luogo geometrico di questa projezione è come dal parag. 4.

$$r^2 = c^2 \cos^2 p - a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q,$$

ove facendo le derivate parziali del raggio vettore r rapporto a p, e q, e sostituite nella formola generale riportata al parag. 5. per la quadratura delle superficie, e ritenendo

$$u = \cos p, \qquad v = \operatorname{sen} p \cos q, \qquad w = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q,$$

si otterà l'integrale doppio

$$S_{\prime} = \int\int \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(c^4u^2 + a^4v^2 + b^4w^2)}.$$

I limiti dell' integrale dovranno desumersi dalla condizione, a cui è soggetto il valore di r^2, ciò è

$$c^2 \cos^2 p > (a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q) \operatorname{sen}^2 p$$

ossia

$$\cot p > \frac{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}{c},$$

e perciò eseguendo una prima integrazione rapporto a p, i limiti delle coordinate positive saranno

$$p = 0, \qquad p = \operatorname{arctang}\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}\right),$$

e quindi q compreso fra i limiti $q = 0$, $q = \frac{1}{2}\pi$.

In questa guisa l'integrale definito moltiplicato per 8 rappresenterà l'intera

quadratura della superficie in proposito, se dunque porremo per brevità

$$p_{,} = \operatorname{arctang}\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}\right)$$

avremo

$$S_{,} = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{p'}\operatorname{sen} p\,dp\,dq\,\sqrt{(c^4u^2 + a^4v^2 + b^4w^2)}.$$

Con un processo del tutto simile si troverà il valore di un integrale definito S_2 atto a rappresentare la quadratura della superficie, luogo geometrico della projezione del centro dell' iperboloide da una falda sui piani tangenti: infatti dalla sua equazione polare

$$r^2 = a^2\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q - c^2\cos^2 p$$

si troverà dalla citata formola generale del parag. 5.

$$S_2 = \int\int\operatorname{sen} p\,dp\,dq\,\sqrt{(c^4u^2 + a^4v^2 + b^4w^2)}.$$

Volendo eseguire una prima integrazione rapporto a, p, i limiti verranno somministrati dalla condizione

$$c^2\cos^2 p < (a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)\operatorname{sen}^2 p$$

ossia

$$\cot p < \frac{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}{c}$$

d'onde sarà per i limiti

$$p = \operatorname{arctang}\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2\operatorname{sen}^2 q)}}\right), \qquad p = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ai quali corrisponderanno in seguito $q = 0$, $q = \frac{1}{2}\pi$, e per conseguenza l'intera superficie sarà rappresentata dall' integrale definito

$$S_2 = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{p_1}^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen} p\,dp\,dq\,\sqrt{(c^4u^2 + a^4v^2 + b^4w^2)}.$$

Prima di venire nei due integrali definiti S_1, S_2 all' integrazione diretta rapporto a p, noi faremo un' osservazione non priva d'importanza. L'angolo p_1 è un angolo compreso fra i limiti $p = 0$, $p = \frac{1}{2}\pi$, e perciò un' integrale definito preso fra questi limiti si potrà decomporre in due nuovi integrali compresi fra i limiti $p = p_1$, $p = \frac{1}{2}\pi$, ed insieme $p = 0$, $p = p_1$ quindi al secondo membro della S_1 si potrà sostituire la differenza di due integrali, cio è

$$S_1 = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen} p\,dp\,dq\,\sqrt{(c^4u^2 + a^4v^2 + b^4w^2)}$$
$$- 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{p_1}^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen} p\,dp\,dq\,\sqrt{(c^4u^2 + a^4v^2 + b^4w^2)}.$$

Ora il primo integrale rappresenta la superficie S_1 projezione del centro dell' ellissoide sui piani tangenti, ed il secondo integrale è la superficie S_2 projezione simile del centro dell' iperboloide da una falda, e per conseguenza

$$S = S_1 + S_2:$$

„Se dunque sopra i stessi assi principali $2a$, $2b$, $2c$ si descrivano l'ellissoide, „e le due iperboloidi, la superficie, luogo geometrico della projezione orto-„gonale del centro dell' ellissoide sui piani tangenti è eguale alla somma delle „superficie, projezioni simili del centro delle due iperboloidi."

13. Occupiamoci adesso della quadratura della superficie S_2 projezione del centro dell' iperboloide da una falda sui piani tangenti, e che ci servirà in appresso per conoscere il valore della S_1: poniamo per brevità

$$A = c^4, \qquad B = a^4 \cos^2 q + b^4 \operatorname{sen}^2 q,$$

si trova

$$S_2 = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_p^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(A\cos^2 p + B \operatorname{sen}^2 p)}.$$

Sia inoltre

$$V = \int_{p_1}^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} p\, dp \sqrt{(A \cos^2 p + B \operatorname{sen}^2 p)},$$

avremo dai noti metodi d'integrazione

$$V = \tfrac{1}{2}\cos p_1 \sqrt{(A\cos^2 p_1 + B \operatorname{sen}^2 p_1)} + \frac{B}{2\sqrt{(B-A)}} \operatorname{arctang}\left(\frac{\cos p_1 \sqrt{(B-A)}}{\sqrt{(A\cos^2 p_1 + B \operatorname{sen}^2 p_1)}}\right),$$

l'angolo p_1 come dall' antecedente parag. 12. è una funzione dell' angolo q egualmente alla B, se dunque faremo

$$Q = \cos p_1 \sqrt{(A\cos^2 p_1 + B \operatorname{sen}^2 p_1)}, \qquad f(q) = \frac{B}{2\sqrt{(B-A)}},$$

$$L(q) = \frac{\cos p_1 \sqrt{(B-A)}}{\sqrt{(A\cos^2 p_1 + B \operatorname{sen}^2 p_1)}}$$

la quadratura della nostra superficie sarà ridotta agli integrali definiti semplici della forma

$$S_2 = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q\, dq + 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(q) \cdot \operatorname{arctang}[L(q)]\, dq.$$

Ora dal valore di p_1 abbiamo

$$\operatorname{sen} p_1 = \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}, \qquad \cos p_1 = \frac{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}},$$

d'onde per la sostituzione di questi, e dei valori di A, e B si ottiene

$$Q = \frac{c\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}\ \sqrt{[a^2(c^2 + a^2)\cos^2 q + b^2(c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 q]}}{(c^2 + a^2)\cos^2 q + (c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 q},$$

$$f(q) = \frac{a \cos^2 q + b^4 \operatorname{sen}^2 q}{\sqrt{[(a^4 - c^4)\cos^2 q + (b^4 - c^4)\operatorname{sen}^2 q]}},$$

$$L(q) = \frac{\sqrt{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)} \cdot \sqrt{[(a^4 - c^4)\cos^2 q + (b^4 - c^4)\operatorname{sen}^2 q]}}{c\sqrt{[a^2(c^2 + a^2)\cos^2 q + b^2(c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 q]}}$$

Tali sono le tre funzioni dell' angolo q, che entrano nel secondo membro di S_2. Il primo integrale è riducibile a funzioni ellittiche di terza specie: infatti ponendo

$$\operatorname{tang} q = \frac{a}{b} \operatorname{tang} \varphi,$$

verrà

$$\operatorname{sen} q = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}, \qquad \cos q = \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}},$$

$$dq = \frac{ab\,d\varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

dalle quali

$$Q = \frac{a^2 b^2 c \sqrt{[(c^2 + a^2)\cos^2 \varphi + (c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 \varphi]}}{b^2(c^2 + a^2)\cos^2 \varphi + a^2(c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 \varphi},$$

e quindi facendo per brevità

$$M = b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi, \qquad N = b^2(c^2 + a^2)\cos^2 \varphi + a^2(c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 \varphi,$$

risulterà con facilità

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q\,dq = a^2 b^2 c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{[(c^2 + a^2)\cos^2 \varphi + (c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 \varphi]\,d\varphi}{MN\sqrt{[(c^2 + a^2)\cos^2 \varphi + (c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 \varphi]}}.$$

Ora in generale da una decomposizione della frazione

$$\frac{a' \cos^2 \varphi + b' \operatorname{sen}^2 \varphi}{(m \cos^2 \varphi + n \operatorname{sen}^2 \varphi)(m' \cos^2 \varphi + n' \operatorname{sen}^2 \varphi)} = \frac{A}{m \cos^2 \varphi + n \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{B}{m' \cos^2 \varphi + n' \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

si trova

$$A = \frac{b' m - a' n}{m n' - m' n}, \qquad B = \frac{a' n' - b' m'}{m n' - m' n}.$$

Nel nostro caso per i valori di M, N,

$$a' = a^2 + c^2, \qquad b' = c^2 + b^2, \qquad m' = b^2, \qquad n' = a^2,$$
$$m = b^2(c^2 + a^2), \quad n = a^2(c^2 + b^2),$$

d'onde

$$A = -\frac{(a^2 + c^2)(c^2 + b^2)}{a^2 b^2}, \qquad B = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2},$$

e perciò

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q\,dq = abc(a^2 + b^2 + c^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{M\sqrt{[(c^2 + a^2)\cos^2 \varphi + (c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 \varphi]}}$$
$$- abc(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{N\sqrt{[(c^2 + a^2)\cos^2 \varphi + (c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 \varphi]}}.$$

Sostituendo finalmente $\cos^2\varphi = 1 - \operatorname{sen}^2\varphi$, e prendendo $a > b$, si faccia

$$h^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}, \qquad n = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{b^2(c^2 + a^2)}, \qquad n_1 = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

otterremo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q\,dq = \frac{ac(a^2 + b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1 + n_1 \operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{(1 - h^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}}$$
$$- \frac{ac(b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1 + n \operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{(1 - h^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}}$$

Di qui si vede, che l'integrale definito in questione si riduce a funzioni ellittiche complete di terza specie a parametri positivi n, n_1, e dello stesso modulo $h < 1$. Adottando le consuete notazioni di Legendre si avrà

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Q\,dq = \frac{ac(a^2 + b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}\, \Pi(n_1, h) - \frac{ac(b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}\, \Pi(n, h),$$

e per conseguenza la quadratura della superficie in proposito sarà espressa per

$$S_2 = \frac{4ac(a^2 + b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}\, \Pi(n_1, h) - \frac{4ac(b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}\, \Pi(n, h)$$
$$+ 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(q)\cdot \operatorname{arctang}[L(q)]\,dq.$$

Le funzioni ellittiche complete di terza specie, che entrano in questa espressione si riducono a funzioni ellittiche di prima, e seconda specie, come mostremo in appresso. Volendo calcolare la superficie S_1 projezione del centro dell' iperboloide da due falde sui piani tangenti, avremo

$$S_1 = S - S_2,$$

ove S rappresenta la superficie projezione simile del centro dell' ellissoide di semiassi principali a, b, c, quindi per quanto si è detto al parag. 5. si hà per la condizione $c < b < a$, e per i valori

$$\cos\mu = \frac{c}{a}, \qquad x^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^4 - c^4},$$

$$S = \frac{2\pi b^2 c^2}{a^2} + \frac{2\pi a^4}{\sqrt{(a^4 - c^4)}}\Big(\cos^2\mu\, F(x, \mu) + \operatorname{sen}^2\mu\, E(x, \mu)\Big),$$

e perciò

$$S_1 = \frac{2\pi b^2 c^2}{a^2} + \frac{2\pi a^4}{\sqrt{(a^4 - c^4)}}\Big(\cos^2\mu\, F(x, \mu) + \operatorname{sen}^2\mu\, E(x, \mu)\Big)$$
$$+ \frac{4ac(b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}\, \Pi(n, h) - \frac{4ac(a^2 + b^2 + c^2)}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}\, \Pi(n_1, h)$$
$$- 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(q)\, \operatorname{arctang}[L(q)]\,dq.$$

Il valore di S_1 dipende dalle tre funzioni ellittiche le quali si potranno ridurre a quelle di prima, e di seconda specie, e da un' altra quantità trascendente commune alla S_2.

14. Non sarà inutile qui di fare una qualche riduzione sopra il prodotto delle due funzioni

$$f(q) \text{ e arc tang } [L(q)],$$

che serve di coëfficiente a dq nell' ultimo integrale definito. Sia

$$\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \qquad \lambda'^2 = \frac{a^4-b^4}{a^4-c^4},$$

$$\lambda''^2 = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2+c^2)}{a^2(a^2+c^2)}, \qquad \lambda'''^2 = \frac{a^4-b^4}{a^4},$$

le due funzioni $f(q)$, $L(q)$ si ridurranno ad

$$f(q) = \frac{a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}} \cdot \frac{(1-\lambda'''^2 \operatorname{sen}^2 q)}{\sqrt{(1-\lambda'^2 \operatorname{sen}^2 q)}},$$

$$L(q) = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c} \cdot \frac{\sqrt{(1-\lambda^2 \operatorname{sen}^2 q)\cdot(1-\lambda'^2 \operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(1-\lambda''^2 \operatorname{sen}^2 q)}}.$$

Fissa la supposizione di $a > b > c$, tutte le quantità λ, λ', λ'', λ''' saranno minori dell' unità, come evidentemente apparisce da tutte; così per la λ'' si hà

$$\lambda''^2 = 1 - \frac{(b^4+b^2c^2)}{a^4+a^2c^2},$$

ove essendo $b^4 < a^4$, $b^2c^2 < a^2c^2$, ne viene $\lambda'' > 1$.

Facciamo inoltre

$$\Delta = \sqrt{(1-\lambda^2 \operatorname{sen}^2 q)}, \qquad \Delta' = \sqrt{(1-\lambda'^2 \operatorname{sen}^2 q)},$$

$$\Delta'' = \sqrt{(1-\lambda''^2 \operatorname{sen}^2 q)}, \qquad \Delta''' = \sqrt{(1-\lambda'''^2 \operatorname{sen}^2 q)},$$

avremo

$$f(q) = \frac{a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}} \cdot \frac{\Delta'''^2}{\Delta'}, \qquad L(q) = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c} \cdot \frac{\Delta\Delta'}{\Delta''}$$

Di qui

$$f(q) \text{ arc tang}[(q)] = \frac{a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}} \cdot \frac{\Delta'''^2}{\Delta'} \text{ arc tang} \left(\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c} \cdot \frac{\Delta\Delta'}{\Delta''}\right),$$

qual valore sostituito nel secondo membro di S_1, darà

$$S_1 = \frac{4ac(a^2+b^2+c^2)}{b\sqrt{(a^2+c^2)}} \Pi(n_1, h) - \frac{4ac(l^2+c^2)}{b\sqrt{(a^2+c^2)}} \Pi(n, h)$$

$$+ \frac{4a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Delta'''^2}{\Delta'} \operatorname{arctang} \left(\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c} \cdot \frac{\Delta\Delta'}{\Delta''}\right) dq.$$

Sviluppando in serie l'arco per le potenze della tangente si otterrebbero integrali riducibili a funzioni ellittiche di tutte tre le specie.

15. Facciamo ora la riduzione delle due funzioni ellittiche di terza specie. Pongasi

$$h' = 1 - h^2, \qquad \Delta(h,\theta) = \sqrt{(1 - h^2 \operatorname{sen}^2\theta)},$$
$$\Phi(\theta) = F(h)\,E(h',\theta) + F(h',\theta)\,E(h) - F(h)\,F(h',\theta),$$

si sà che il parametro n positivo potrà rappresentarsi sotto la forma

$$n = \cot^2\theta,$$

ed allora per una formola data da Legendre*), abbiamo

$$\Pi(\cot^2\theta, h) = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\Delta(h',\theta)}\left(\tfrac{1}{2}\pi + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\Delta(h',\theta)\,F(h) - \Phi(\theta)\right).$$

Prendendo

$$h^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}, \qquad \cot^2\theta = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{b^2(c^2 + a^2)},$$

otteniamo

$$h'^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a\sqrt{(b^2 + c^2)}}, \qquad \cos\theta = \frac{c\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a\sqrt{(b^2 - c^2)}},$$
$$\Delta(h',\theta) = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a},$$

d'onde

$$\Pi(\cot^2\theta, h) = \frac{b^2\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a^2(b^2 + c^2)}\,F(h) + \frac{bc\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a(b^2 + c^2)}[\tfrac{1}{2}\pi - \Phi(\theta)].$$

Nella stessa guisa per l'altra funzione ellittica di terza specie a parametro n_1, prendendo

$$n_1 = \cot^2\omega = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

trovasi

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{b}{a}, \qquad \cos\omega = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a},$$
$$\Delta(h_{,}, \omega) = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\cdot\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}{a\sqrt{(a^2 + c^2)}},$$

e percio

$$\Pi(\cot^2\omega, h) = \frac{b^2}{a^2}\,F(h) + \frac{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Phi(\omega)].$$

La nuova funzione $\Phi(\omega)$ è formata nello stesso modo che la funzione $\Phi(\theta)$. Sostituendo i trovati valori nel secondo membro della S_2 si hà finalmente

$$S_2 = \frac{4b^3c}{a\sqrt{(a^2 + c^2)}}\,F(h) + 4c(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}\,[\tfrac{1}{2}\pi - \Phi(\omega)]$$
$$- 4c^2[\tfrac{1}{2}\pi - \Phi(\theta)] + \frac{4a^4}{\sqrt{(a^4 - c^4)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Delta'''^2}{\Delta'}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{c}\cdot\frac{\Delta\Delta'}{\Delta''}\right)dq\,.$$

---

*) Fonctions elliptiques Tom. I. pag. 134.

Da questo valore si deduce immediatamente quello di S_1 per l'ultima formola del parag. 13. ciò che darà

$$S_1 = \frac{2\pi b^2 c^2}{c^2} + \frac{2\pi a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}}[\cos^2\mu\, F(x,\mu) + \operatorname{sen}^2\mu\, E(x,\mu)]$$

$$-\frac{4b^2 c}{a\sqrt{(a^2+c^2)}}F(h) - 4c(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\pi - \Phi(\omega)] + 4c^2[\tfrac{1}{2}\pi - \Phi(0)]$$

$$-\frac{4a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\Delta'''^2}{\Delta'}\,\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c}\frac{\Delta\Delta'}{\Delta''}\right)dq\,.$$

I precedenti valori di S_2 ed S_1 oltre l'integrale definito contengono le sole funzioni ellittiche di prima, e seconda specie.

16. È facile di verificare l'esattezza delle due espressioni S_2 ed S_1 in un qualche caso particolare. Sia $a = b$ od anche $a = b = c$, allora

$$h = 1, \quad \Phi(0) = \tfrac{1}{2}\pi = \Phi(\omega), \quad F(h) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \Delta = \Delta' = \Delta'' = \Delta''' = 1,$$

ed avremo respettivamente

$$S_2 = \frac{2\pi a^2 c}{\sqrt{(a^2+c^2)}} + \frac{2\pi a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}}\,\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c}\right), \qquad S_2 = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\,.$$

Tali sono le superficie generate dalla rotazione delle due lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - c^2y^2, \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

attorno l'asse delle y. La medesima supposizione di $a = b$ si faccia nel secondo membro della S_1 verrà per una riduzione già fatta al parag. 6.

$$S_1 = 2\pi c^2 + \frac{2\pi a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}}\,\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{(a^4-c^4)}}{c^2}\right)$$

$$-\frac{2\pi a^2 c}{\sqrt{(a^2+c^2)}} - \frac{2\pi a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}}\,\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{c}\right),$$

la quale si perrà anche porre sotto la forma

$$S_1 = 2\pi c^2 - \frac{2\pi a^2 c}{\sqrt{(a^2+c^2)}} + \frac{2\pi a^4}{\sqrt{(a^4-c^4)}}\,\text{arc tang}\left[\frac{[c(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - c^2](a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c^2+(a^2-c^2)(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Questa espressione rappresenterà la superficie generata dalla rotazione della lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 = c^2x^2 - a^2y^2,$$

attorno l'asse delle x. Qui pure per $a = c$ si ottiene facilmente del primo valore di S_1 l'espressione

$$S_1 = 4\pi a^2 - \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}} = 4\pi a^2\left(\frac{\sqrt{(2-1)}}{\sqrt{2}}\right),$$

la quale serve a rappresentare la superficie generata dalla lemniscata equilatera

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

attorno l'asse delle x.

17. Ripresa l'equazione

$$r^2 = c^2 \cos^2 p - a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q - b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q,$$

la quale appartiene alla superficie del quarto ordine projezione del centro dell iperboloide da due falde sui piani tangenti, avremo per la cubatura del suo volume V l'integrale definito

$$V = \tfrac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{p_1} \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(c^2 u^2 - a^2 v^2 - b^2 \omega^2)}^3 .$$

l'angolo p_1 funzione dell' angolo q è determinato dalle stesse formole, che abbiamo richiamato al parag. 13., come anche

$$u = \cos p, \quad v = \operatorname{sen} p \cos q, \quad \omega = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q.$$

Sia per brevità

$$A = c^2, \quad B = a^2 \cos q + b^2 \operatorname{sen}^2 q, \quad P = \sqrt{(A \cos^2 p - B \operatorname{sen}^2 p)},$$

$$W = \int \operatorname{sen} p\, dp \sqrt{(A \cos^2 p - B \operatorname{sen}^2 p)}^3 = \int P^3 \operatorname{sen} p\, dp,$$

avremo dai conosciuti metodi d'integrazione

$$W = -\frac{P^3 \cos p}{4} + \frac{3BP\cos p}{8} - \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log[P + \cos p\sqrt{(A+B)}]$$

l'angolo p_1 come dalle citate formole del parag. 13. porge

$$\operatorname{sen} p_1 = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(A+B)}} \qquad \cos p_1 = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(A+B)}},$$

è quindi per $p = p_1$ risulterà

$$W_1 = -\frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log(\sqrt{B}),$$

come per $p = 0$ sarà

$$W_0 = -\frac{A\sqrt{A}}{4} + \frac{3B\sqrt{A}}{8} - \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log[\sqrt{A} + \sqrt{(A+B)}]$$

Dalla differenza dei due integrali si hà l'integrale definito

$$W = \frac{A\sqrt{A}}{4} - \frac{3B\sqrt{A}}{8} + \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}} \log\left(\frac{\sqrt{A} + \sqrt{(A+B)}}{\sqrt{B}}\right),$$

e rimettendo i valori di A, B, sarà

$$W = \frac{c^3}{4} - 3c\frac{(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}{8}$$

$$+ \frac{3(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2}{8\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}} \log\left(\frac{c + \sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}\right)$$

Moltiplicando il secondo membro per dq, ed integrando, entro i limiti $q = 0$, $q = \frac{1}{2}\pi$ si avrà

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} W dq,$$

quindi eseguendo le integrazioni, e facendo

$$f(q) = \frac{(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2}{\sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}, \qquad L(q) = \frac{c + \sqrt{(c^2 + a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}{\sqrt{(a^2\cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}},$$

otterremo

$$V = \frac{\pi c^3}{3} - \frac{\pi c}{4}\cdot(a^2 + b^2) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(q)\log[L(q)]dq$$

Tale sarà l'espressione del volume V terminato dalla superficie

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = c^2 z^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

Quando fosse $a = b$, od anche $a = b = c$, si ricaverà respettivamente

$$V = \frac{\pi c^3}{3} - \frac{\pi a^2 c}{2} + \frac{\pi a^4}{2\sqrt{(a^2 + c^2)}}\log\left(\frac{c + \sqrt{(a^2 + c^2)}}{a}\right),$$

oppure

$$V = \frac{\pi a^3}{2}\left(\frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\right),$$

quali saranno i volumi generati dalla rotazione delle aree delle due lemniscate di equazioni

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2 x^2 - a^2 y^2, \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

attorno l'asse delle x.

18. Consideriamo in ultimo il volume V terminato dalla superficie, projezione del centro dell' iperboloide da una falda sui piani tangenti; e per la quale la sua equazione polare è

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q - c^2 \cos^2 p,$$

si avrà per la sua cubatura

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{p_1}^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(a^2 v^2 + b^2 w^2 - c^2 u^2)^3},$$

e ritenendo per A, B le quantità di già notate nel parag. antecedente, sarà

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{p_1}^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{(B \operatorname{sen}^2 p - A\cos^2 q)^3}.$$

Qui pure sia

$$P = \sqrt{(B\operatorname{sen}^2 p - A\cos^2 p)}, \qquad W = \int P^3 \operatorname{sen} p\, dp,$$

avremo dall' integrazione indefinita

$$W = -\left[\frac{P^3\cos p}{4} + \frac{3BP\cos p}{8} + \frac{3B^2}{8\sqrt{(A+B)}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos p\sqrt{(A+B)}}{P}\right)\right].$$

Ora ai limiti $p = p_1$, $p = \frac{1}{2}\pi$, diverrà

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} p\, dp \sqrt{(B \operatorname{sen}^2 p - A \cos^2 p)^3} = \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{B^2}{\sqrt{(A+B)}},$$

l'angolo p_1 funzione dell' angolo q è sempre determinato per le formole più volte citate del parag. **13.** Sostituendo adunque di nuovo i valori di A, B sarà per il richiesto volume

$$V = \frac{1}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2 dq}{\sqrt{(c^2 + a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)}}.$$

Questo integrale dipende dalle funzioni ellittiche complete di prima, e seconda specie; infatti supponendo $a > b$, pongasi

$$\varkappa^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}, \quad \varkappa'^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}, \quad \varDelta = \sqrt{(1 - \varkappa^2 \operatorname{sen}^2 q)},$$

verrà

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{(a^2+c^2)}} \left[a^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^4 q\, dq}{\varDelta} + b^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^4 q\, dq}{\varDelta} + 2a^2 b^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 q \cos^2 q\, dq}{\varDelta} \right].$$

Ora richiamando le formole di riduzione che abbiamo riportate al parag. **10,** e facendo per brevità

$$H^2 = 2[a^4(\varkappa^2 - \varkappa'^2) - b^4(1 + \varkappa^2) + a^2 b^2 (2 - \varkappa^2)]$$
$$H_i^2 = a^4 \varkappa'^2 (2\varkappa'^2 - \varkappa^2) + b^4(2 + \varkappa^2) - 4a^2 b^2 \varkappa'^2,$$

si troverà in generale

$$\int \frac{(a^2 \cos^2 q + b^2 \operatorname{sen}^2 q)^2 dq}{\varDelta} = \frac{(a^2 - b^2) \varDelta \operatorname{sen} q \cos q}{3\varkappa^2} + \frac{H^2 E(\varkappa, q)}{3\varkappa^4} + \frac{H_i^2 F(\varkappa, q)}{3\varkappa^4}.$$

Qui pure sarà utile di cercare le più semplici espressioni dei coëfficienti H^2, H_i^2. A questo oggetto si sostituisca primieramente nel valore di H^2 la quantità $\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2$, si avrà primieramente

$$H^2 = 2(a^2 - b^2)[(2a^2 + b^2)\varkappa^2 - (a^2 - b^2)],$$

nella quale per la nuova sostituzione del valore di $\varkappa^2$ verrà facilmente

$$H^2 = \frac{2(a^2 - b^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(a^2 + c^2)^2}$$

d'onde

$$\frac{H^2}{\varkappa^4} = 2(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

Nello stesso modo sostituendo in H_i^2 i valori di $\varkappa^2$, $\varkappa'^2$, avremo dopo la riduzione al medesimo denominatore

$$H_i^2 = \frac{1}{(a^2+c^2)^2} \Big[a^4 (3b^2 + 2c^2 - a^2)(b^2 + c^2) - 4a^2 b^2 (b^2 + c^2)(a^2 + c^2)$$
$$+ b^4 \Big((a^2 - b^2)(a^2 + c^2) + 2(a^2 + c^2)^2 \Big) \Big],$$

la quale ordinata rapporto alle potenze di a si trova divisibile per $(a^2-b^2)^2$, quindi risulterà

$$H_{\prime}^2 = \frac{(a^2-b^2)^2(2c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)}{(a^2+c^2)^2},$$

ossia

$$\frac{H_{\prime}^2}{x^4} = 2c^4-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

Tali saranno le più semplici espressioni, che possono prendere i coëfficienti delle due funzioni ellittiche, in modo che ponendo

$$K=(a^2+c^2)(a^2+b^2-c^2), \qquad K_{\prime}=2c^4-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

verrà

$$\int\frac{(a^2\cos^2 q+b^2\operatorname{sen}^2 q)^2 dq}{\varDelta} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+c^2)\varDelta\operatorname{sen}q\cos q}{3}+\frac{2KE(x,q)}{3}+\frac{K_{\prime}F(x,q)}{3},$$

e perciò entro i limiti $q=0$, $q=\frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(a^2\cos^2 q+b^2\operatorname{sen}^2 q)^2 dq}{\varDelta} = \frac{2KE+K_{\prime}F}{3},$$

dunque

$$V = \frac{\pi(2KE+K_{\prime}F)}{6\sqrt{(a^2+c^2)}}.$$

Tal' è il volume terminato dalla superficie del quarto ordine

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2$$

luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' iperboloide da una falda sui piani tangenti: la trovata espressione del volume dipende evidentemente dalle funzioni ellittiche complete E, F di prima, e seconda specie. Nella supposizione particolare di $a=b$, o di $a=b=c$, si giungerà a

$$V = \frac{\pi^2a^4}{4\sqrt{(a^2+c^2)}}, \qquad V = \frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{3}},$$

e rappresenteranno i volumi generati dalla rotazione delle aree delle due lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2-c^2y^2, \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

attorno l'asse delle y; come si può facilmente verificare per mezzo delle note formole della cubatura dei solidi di rivoluzione.

Roma 1. 9bre 1844.

3.

Auflösungen und Beweise einer Reihe von Aufgaben und Lehrsätzen der ebenen Geometrie.

(Von Herrn *A. Jacobi* zu Breslau, Premier-Lieutenant a. D.)

In den folgenden eilf scheinbar von einander unabhängigen Aufsätzen war ich bemüht einige der einfachen Sätze zu entwickeln, auf die sich die ganze Theorie der Kegelschnitte basiren lässt und mit Hülfe welcher der innige Zusammenhang vieler Eigenschaften der Kegelschnitte mit denen von Systemen von Geraden hervorgeht. Bei dieser Arbeit liegt das allgemein bekannte Werk des Herrn Professor *Steiner* „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" zum Grunde, und überall, wo irgend eine Seitenzahl ohne weitere Bemerkung angeführt ist, wird dasselbe gemeint. Auf diesen wenigen Bogen konnte natürlich keine umfassende Theorie der Kegelschnitte gegeben werden, und ich habe besonders, mit Voraussetzung des allgemein Bekannten, mehrere der im Anhange jenes Werkes von *Steiner* gegebenen Aufgaben und Sätze zu lösen und zu beweisen gesucht. Die Eigenschaften der Brennpuncte der Kegelschnitte sind nicht erwähnt, da sie sich aus der Darstellung in X. unmittelbar an die Weise anschliessen, wie sie in dem Werke „*Traité des propriétés projectives des figures, par Poncelet*" entwickelt sind.

Um Irrungen zu vermeiden sei noch erwähnt, dass die Entwickelung in XI. nicht alle Curven 4ter Ordnung mit zwei Doppel-Puncten giebt, aber wohl in den Constructionen von VIII. alle mögliche dieser Curven mit drei Doppel-Puncten enthalten sein dürften.

Breslau, den 15. März 1845.

I.

Relationen zwischen vier Puncten einer Geraden und einem Kreise.

1. Werden in einer Geraden vier Puncte A, B, C und D angenommen und von einem Puncte P ausserhalb derselben nach jenen Puncten die Strahlen a, b, c und d gezogen, so hat man bekanntlich folgende Relationen:

$$\frac{AB}{AD}:\frac{CB}{CD}=\frac{\sin(ab)}{\sin(ad)}:\frac{\sin(cb)}{\sin(cd)},$$
$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{\sin(ac)}{\sin(ad)}:\frac{\sin(bc)}{\sin(bd)},$$
$$\frac{AB}{AC}:\frac{DB}{DC}=\frac{\sin(ab)}{\sin(ac)}:\frac{\sin(db)}{\sin(dc)}.$$

Sie verwandeln sich leicht, wenn man den Punct P in Fig. 1. Taf. I. im Durchschnitte der beiden Halbkreise über AC und BD annimmt und dabei den Winkel (ab) durch φ bezeichnet, in die nachstehenden:

$$\frac{AB}{AD}:\frac{CB}{CD}=\operatorname{tang}\varphi^2,$$
$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{1}{\cos\varphi^2},$$
$$\frac{AB}{AC}:\frac{DB}{DC}=\sin\varphi^2.$$

Die Gleichungen

$$(\mathfrak{A})\ldots\ldots\begin{cases}\sin\varphi^2+\cos\varphi^2=1,\\ \dfrac{1}{\cos\varphi^2}-\operatorname{tang}\varphi^2=1,\\ \dfrac{1}{\sin\varphi^2}-\dfrac{1}{\operatorname{tang}\varphi^2}=1\end{cases}$$

sind bekannt und aus jeder von ihnen ergiebt sich mit Hilfe der obigen unmittelbar

$$1.\quad AB.DC+AD.BC=AC.BD,$$

welches eine bekannte Relation der Entfernungen von vier Puncten einer Geraden ist.

Ist in der Geraden noch irgend ein fünfter Punct E gegeben, und in Fig 1. von jenem Puncte P nach E der Strahl e gezogen, so bilden sich die Doppelverhältnisse:

$$\frac{BD}{BA}:\frac{ED}{EA}=\alpha,\qquad \frac{CD}{CA}:\frac{ED}{EA}=\alpha',$$
$$\frac{AD}{AB}:\frac{ED}{EB}=\beta,\qquad \frac{CD}{CB}:\frac{ED}{EB}=\beta',$$
$$\frac{AD}{AC}:\frac{ED}{EC}=\gamma,\qquad \frac{BD}{BC}:\frac{ED}{EC}=\gamma';$$

wo α, α', β, ... die Werthe derselben sind. Nimmt man in der Gleichung

$$\alpha,\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'=\delta$$

für α, α', β, β', γ und γ' die den obigen Doppelverhältnissen entsprechenden im Strahlenbüschel und beachtet, dass

$$\sin(ac)=\sin(bd)=1,$$
$$\sin(ab)=\sin(cd),\qquad \sin(ad)=\sin(cb),$$

ist, so folgt:

$$\frac{\sin(ea)^2}{\sin(ed)^2}+\frac{\sin(eb)^2}{\sin(ed)^2}+\frac{\sin(ec)^2}{\sin(ed)^2}=\delta.$$

Hieraus wird aber, weil

$$\sin(ec)=\cos(ea),\qquad \sin(ed)=\cos(eb)$$

ist, nach der ersten Gleichung in ($\mathfrak{A}$),

$$\frac{\sin(ea)^2}{\sin(ed)^2}-\frac{\sin(eb)^2}{\sin(ed)^2}+\frac{\sin(ec)^2}{\sin(ed)^2}=1,$$

und aus dieser Gleichung folgt unmittelbar

$$2.\quad \frac{DB\cdot DC}{AB\cdot AC}\cdot EA^2-\frac{DA\cdot DC}{BA\cdot BC}\cdot EB^2+\frac{DA\cdot DB}{CA\cdot CB}\cdot EC^2=ED^2;$$

welches eine Gleichung zwischen fünf Puncten einer Geraden ist. Wird E in unendlicher Entfernung angenommen, so folgt daraus:

$$3.\quad DB.DC.BC-DA.DC.AC+DA.DB.AB=AB.AC.BC,$$

und wenn D der unendlich entfernte Punct ist:

$$4.\quad BC.EA^2-AC.EB^2+AB.EC^2=AB.AC.BC.$$

Mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes überzeugt man sich leicht, dass die Gleichungen 2. und 4. auch gültig sind, wenn der Punct E ausserhalb der gegebenen Geraden liegt. In Bezug auf diese Gleichungen sehe man übrigens die Geschichte der Geometrie von *Chasles*, aus dem Französischen übersetzt von *Sohncke* S. 173.

Aus der Gleichung 4. lässt sich sogleich ein bekannter Satz ableiten. Es seien nämlich in Fig. 2. in einer Geraden die Puncte A und C zu B

und D zugeordnete harmonische Puncte und über BD, als Durchmesser, ein Kreis aus dem Mittelpuncte M beschrieben, so ist für jeden Punct E des Kreises:

$$EM^2.AC - EC^2.AM + EA^2.MC = AC.AM.MC,$$

und es wird hieraus, da in Folge der harmonischen Beziehungen nach S. 27.

$$EM^2 = MC.MA$$

ist, offenbar

$$\frac{EA^2}{EC^2} = \frac{MA}{MC}.$$

Es ist aber ferner nach der Gleichung 4.

$$BA^2.MC - BC^2.AM + BM^2.AC = MC.AM.AC,$$

und da ebenfalls

$$BM^2 = MC.MA,$$

ist, so folgt

$$\frac{BA^2}{BC^2} = \frac{MA}{MC}.$$

Für jeden Punct E des Kreises M ist also nothwendig

$$\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}.$$

Der Ort der Spitze E *eines Dreiecks* AEC, *welches eine gegebene Grundlinie* AC *und ein constantes Verhältniss der Seiten* EA *und* EC *hat, ist also ein Kreis.*

Dieser Kreis wird gefunden, wenn man die Seite AC in B nach dem gegebenen Verhältnisse theilt, zu B in Bezug auf A und C den vierten zugeordneten harmonischen Punct D sucht und über BD, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt, welcher der verlangte ist.

Wir wollen jetzt aus der Gleichung 4. noch einen andern bekannten Satz ableiten. Es seien nemlich in Fig. 3. von zwei Puncten A und B an einen Kreis Tangenten gelegt, die ihn in den Puncten E und D, C und F berühren, und zwar seien diese Tangenten so gewählt, dass die Gerade CF durch A und die ED durch B geht, was, wie bekannt, stets möglich ist. Alsdann ist:

$$AB^2.ED - AD^2.EB + AE^2.DB = DB.EB.ED$$

und nach einem bekannten Satze

$$BC^2 = DB.EB,$$

folglich

$$AB^2.ED - AD^2.EB + AE^2.DB = BC^2.ED,$$

und da $AD = AE$ ist,

$$AB^2.ED - AD^2(EB - DB) = BC^2.ED.$$

Es ist aber $EB - DB = ED$, also erhält man

$$AB^2 = AD^2 + BC^2.$$

Ist demnach ein Viereck ECDF *einem Kreise eingeschrieben, so ist das Quadrat der Geraden* AB, *welche die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten verbindet, gleich der Summe der Quadrate der Tangenten, die von diesen beiden Durchschnittspuncten an den Kreis gezogen werden.*

2. In einem Kreise Fig. 4., dessen Mittelpunct M und Radius r ist, sind die vier Puncte A, B, C und D gegeben und von M nach diesen Puncten die Radien α, β, γ und δ, desgleichen von irgend einem Puncte P der Peripherie des Kreises nach ihnen die Strahlen a, b, c und d gezogen. Nach bekannten Sätzen ist

$$AB = 2r \sin \tfrac{1}{2}(\alpha\beta), \qquad AD = 2r \sin \tfrac{1}{2}(\alpha\delta), \;\ldots\ldots$$

und aus der bekannten Vergleichung der Peripherie- und Centri-Winkel folgt

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{\sin(ab)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(cb)}{\sin(cd)},$$

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(bc)}{\sin(bd)},$$

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{\sin(ab)}{\sin(ac)} : \frac{\sin(db)}{\sin(dc)}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich mit Hülfe der Relationen ($\mathfrak{A}$) die Gleichung in 1. wieder, die den Ptolomäischen Lehrsatz enthält; nämlich:

In jedem Viereck im Kreise ist das Product der beiden Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten.

Es ist noch die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, d. h. wenn vier, nicht in einer Geraden liegende Puncte die Gleichung 1. befriedigen, so liegen sie nothwendig in einem Kreise.

Mit der Gleichung 1. müssen auch die beiden folgenden bestehen:

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \alpha, \qquad \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \beta,$$

wo $\alpha - \beta = 1$ werden muss. Durch die drei Puncte A, B und D lässt sich stets ein Kreis M aus dem Mittelpuncte M legen, und in Bezug auf die erste Gleichung für den Werth α ist der Ort des Punctes C ein Kreis, dessen Mittelpunct K in Fig. 5. in der Geraden BD liegt, und der die BD

in zwei Puncten $E_,$ und $F_,$ schneidet, welche zu B und D zugeordnete harmonische Puncte sind. Es ist nun bekanntlich nach 27.

$$K'E_,'^2 = KB.KD.$$

Die beiden Kreise K und M schneiden sich offenbar in zwei Puncten C und C' rechtwinklig, d. h. es steht z. B. die KC auf der MC rechtwinklig, und KC berührt den Kreis M in C. Aus der Lage der beiden Puncte C und C' gegen die Puncte A, B und D sieht man, dass der Punct C die Gleichung 1. befriedigt, und folglich auch der zweiten Gleichung für den Werth β entspricht. Für diese zweite Gleichung ist der Ort des Punctes C ein Kreis, dessen Mittelpunct L in AB liegt und der durch den Punct C des Kreises M geht und diesen Kreis M in C rechtwinklig schneidet. Die beiden Kreise K und L berühren sich also im Puncte C des Kreises M, und es ist nur dieser eine Punct C möglich, welcher der Gleichung 1. entspricht.

Ist daher in einem Viereck das Product der beiden Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten, so liegen die vier Eckpuncte des Vierecks nothwendig in einem Kreise.

Da die Gleichung 2. ihr entsprechende im Strahlenbüschel hat, so besteht sie nothwendig auch zwischen fünf Puncten eines Kreises. Es ist aber bekanntlich z. B.

$$\frac{BD\cdot DC\cdot \sin BDC}{BA\cdot AC\cdot \sin BAC} = \frac{BDC}{ABC},$$

und da Wink. $BDC =$ W. BAC, so folgt für die Vergleichung der Dreiecke

$$5.\quad BDC.EA^2 + DAB.EC^2 = DAC.EB^2 + ABC.ED^2.$$

II.

Die Theorie der Involution.

---

1. Sind zwei projectivische Geraden M und M' gegeben, $A, B, C, \ldots$ die Puncte von M; $A', B', C', \ldots$ die Puncte von M'; sind A und A', B und B', C und C', ... entsprechende Puncte, und werden die Geraden so zur Deckung gebracht, dass wenn die Puncte A und E' zusammenfallen, auch

A' und E in einem Puncte liegen, und eine solche Lage für jede zwei andere entsprechende Punctenpaare Statt findet, so sagt man, die Gerade N, in welcher sich die Geraden M und M' decken, enthalte ein Puncten-System in Involution und nennt jede zwei entsprechende Puncte A und A', B und B', C und C, ... von M und M, zugeordnete Puncte der Involution. Es werden sich auch die Durchschnitte der Parallel-Strahlen von M und M' in einem Puncte O decken, welcher Centralpunct der Involution heisst, und nach S. 39. ist jetzt

$$1. \quad OA.OA' = OB.OB' = \mu^2.$$

Das Product der Entfernungen zugeordneter Puncte der Involution einer Geraden von ihrem Centralpuncte ist also constant.

Es giebt nach S. 65. stets zwei Puncte E und F, in denen sich entsprechende Puncte von M und M' decken, wenn diese auf einander fallenden Geraden ungleich liegen, und für diese Puncte E und F wird

$$2. \quad OE^2 = OF^2 = OA.OA' = \mu^2.$$

Die Puncte E und F heissen doppelte Puncte der Involution und es folgt:

Dass die doppelten Puncte zugeordnete harmonische Puncte zu jeden zwei zugeordneten Puncten der Involution sind und dass der Centralpunct die Entfernung der doppelten Puncte halbirt.

Man sehe hier S. 27. Die doppelten Puncte sind nicht vorhanden, wenn die Geraden M und M' gleich liegen.

In einem Strahlenbüschel der Involution liegen zwei projectivische Strahlenbüschel concentrisch, und jede zwei zugeordnete Strahlen des erstern enthalten zwei entsprechende Strahlenpaare der letztern. Sind a und a', b und b', c und c' ...... zugeordnete Strahlen der Involution, also auch entsprechende Strahlen der concentrischen projectivischen Strahlenbüschel, und sind s und s', t und t' die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel der letztern, so werden sich die ungleichnamigen Schenkel s und t', s' und t decken, und es ist nach S. 40.

$$\text{tang}(as).\text{tang}(a's) = \text{tang}(bs).\text{tang}(b's),$$
$$\text{tang}(as').\text{tang}(a's') = \text{tang}(bs).\text{tang}(b's').$$

Wird hier für b und b' einer der doppelten Strahlen e oder f genommen, so folgt, dass nach S. 27. die Strahlen e und f zu jeden zwei zugeordneten Strahlen a und a' der Involution zugeordnete harmonische Strahlen sind, und dass die Strahlen s und s' die Winkel (aa'), (bb'), (cc'), ... halbiren.

Die doppelten Strahlen sind nicht vorhanden, wenn die concentrischen projectivischen Strahlenbüschel gleich liegen.

Zwei concentrisch-projectivisch gleiche Strahlenbüschel bilden stets einen Strahlenbüschel in Involution; zwei sich deckende ähnliche oder gleich und gleich liegende Geraden bilden nie ein Puncten-System in Involution, aber wohl gleiche und ungleich liegende Geraden. Im letztern Falle liegt der eine doppelte Punct in unendlicher Entfernung.

2. Sind A und A', B und B', C und C' zugeordnete Puncte der Involution einer Geraden N, also auch entsprechende Puncte zweier projectivischen Geraden M und M', so hat man die Gleichungen:

$$3. \quad \begin{cases} \frac{AB}{AC'} : \frac{CB}{CC'} = \frac{A'B'}{A'C} : \frac{C'B'}{C'C}, \\ \frac{AC}{AC'} : \frac{BC}{BC'} = \frac{A'C'}{A'C} : \frac{B'C'}{B'C}, \\ \frac{AB}{AC} : \frac{C'B}{C'C} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{CB'}{CC'}. \end{cases}$$

Die Richtigkeit derselben ist ersichtlich, wenn man in ihnen D für C' und D' für C setzt, d. h. links des Gleichheitszeichens D für C' und rechts desselben D' für C, also in den projectivischen Geraden M und M' sich D und C', D' und C decken lässt, wodurch man die Gleichungen S. 33. erhält. Man kann nun auch entweder D und A', D' und A, oder D und B', D' und B sich deckend vorstellen, und erhält auf diese Weise neun Gleichungen von der Form in 3. zwischen den sechs gegebenen Puncten. Aus diesen Gleichungen zeigt sich aber unmittelbar dass

Durch zwei Paare zugeordneter Puncte der Involution ein Involutions-System einer Geraden bestimmt wird.

Die erste und dritte der Gleichungen in 3. enthalten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens den Abschnitt CC', und aus allen neun Gleichungen von jener Form ergiebt sich daher

$$4. \quad \begin{cases} AB.A'C.C'B' = A'B'.AC'.CB, \\ AB.A'C'.CB' = A'B'.AC.C'B, \\ AB'.A'C.C'B = A'B.AC'.CB', \\ AB'.A'C'.CB = A'B.AC.C'B'. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen die erste und zweite, die dritte und vierte u. s. w. durch einander dividirt und die einzelnen Glieder anders geordnet, giebt:

$$5.\quad \begin{cases} \frac{CA\cdot CA'}{CB\cdot CB'} = \frac{C'A\cdot C'A'}{C'B\cdot C'B'}, \\ \frac{BA\cdot BA'}{BC\cdot BC'} = \frac{B'A\cdot B'A'}{B'C\cdot B'C'}, \\ \frac{AB\cdot AB'}{AC\cdot AC'} = \frac{A'B\cdot A'B'}{A'C\cdot A'C'}. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Relationen (𝔄) in I. ergeben sich ferner aus den Gleichungen 2.

$$6.\quad \begin{cases} \frac{AC}{AC'} : \frac{BC}{BC'} - \frac{A'B'}{A'C} : \frac{C'B'}{C'C} = 1, \\ \frac{AB}{AC} : \frac{C'B}{C'C} + \frac{A'C}{A'C'} : \frac{B'C}{B'C'} = 1, \end{cases}$$

und mehrere andere Gleichungen von dieser Form, in welchen die Vorzeichen durch die Relationen in (𝔄) und die Lage der Puncte in den Geraden bestimmt werden können.

Die Relationen dieses § haben ihre entsprechenden in einem Strahlenbüschel in Involution; sie lassen sich also auch unmittelbar auf einen Kreis übertragen, d. h. sind sechs Puncte A und A', B und B', C und C' eines Kreises gegeben, die mit jedem siebenten Puncte P desselben sechs Strahlen der Involution bestimmen, so erhält man in Bezug auf die durch diese sechs Puncte gegebenen Sehnen des Kreises die Gleichungen 3. bis 6.

3. Es seien wieder A und A', B und B', C und C' zugeordnete Puncte der Involution einer Geraden, O der Centralpunct, und α, β und γ der Reihe nach die Halbirungspuncte der Entfernungen AA', BB', CC'; M sei irgend ein beliebiger Punct der Geraden, so kann man

$$OA.OA' = (OM - MA).(OM - MA'),$$
$$OB.OB' = (OM - MB).(OM - MB')$$

setzen. An die Zeichen — ist hier nicht festzuhalten; sie sind von der gegenseitigen Lage der Puncte abhängig. Aus diesen beiden Gleichungen folgt nach der Gleichung 1.

$$MA.MA' - MB.MB' = OM[MB - MA + MB' - MA'] (AB + A'B')$$

oder

$$MA.MA' - MB.MB' = OM$$

und hieraus folgt

$$7.\quad MA.MA' - MB.MB' = 2.\alpha\beta.OM.$$

Diese Gleichung ist für jede Lage von M in der Geraden gültig, wenn nur die Vorzeichen gehörig beachtet werden, und aus ihr folgt, wenn man für den Punct M entweder den Punct B oder B' nimmt:

$$8.\quad \begin{cases} BA.BA' = 2.\alpha\beta.OB, \\ B'A.B'A' = 2.\alpha\beta.OB'. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen 8. geben aber durch Division

$$9.\quad \frac{BA\cdot BA'}{B'A\cdot B'A'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Aus den Gleichungen von der Form 8. erhält man ferner

$$10.\quad \begin{cases} BA.BA'.\gamma\beta = BC.BC'.\alpha\beta, \\ AB.AB'.\gamma\alpha = AC.AC'.\beta\alpha, \\ CA.CA'.\beta\gamma = CB.CB'.\alpha\gamma \end{cases}$$

und mit ihnen bestehen gleichzeitig die folgenden Gleichungen:

$$11.\quad \begin{cases} B'A.B'A'.\gamma\beta = B'C.B'C'.\alpha\beta, \\ A'B.A'B'.\gamma\alpha = A'C.A'C'.\beta\alpha, \\ C'A.C'A'.\beta\gamma = C'B.C'B'.\alpha\gamma. \end{cases}$$

Die Gleichungen 10. und 11. sind nur Verallgemeinerungen der Gleichungen in 1. und aus ihnen gehen unmittelbar die in 5. wieder hervor.

Es sei M' der zugeordnete Punct der Involution von M, und μ der Halbirungspunct der Entfernung MM', so hat man nach I. die Gleichung

$$\alpha\beta.\gamma\mu + \alpha\mu.\beta\gamma = \alpha\gamma.\beta\mu$$

oder

$$\alpha\beta\cdot\frac{\gamma\mu}{\beta\mu} + \beta\gamma\cdot\frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \alpha\gamma,$$

und hieraus folgt nach den Gleichungen in 10.

$$12.\quad MC.MC'.\alpha\beta - MB.MB'.\alpha\gamma + MA.MA'.\beta\gamma = 0;$$

welches eine Gleichung ist, die die Involution von sechs Puncten mit Hülfe eines beliebigen siebenten Punctes ausdrückt. Wird in ihr

$$MC.MC' = (M\gamma + \gamma C).(M\gamma - \gamma C)$$

u. s. w. gesetzt, so erhält man

$$M\gamma^2.\alpha\beta - M\beta^2.\alpha\gamma + M\alpha^2.\gamma\beta = \gamma C^2.\alpha\beta - \beta B^2.\alpha\gamma + \alpha A^2.\beta\gamma.$$

Hier ist der Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens von der Lage des Punctes M unabhängig; nehmen wir daher links des Gleichheitszeichens für M den Punct β, so dass $M\beta = 0$, so folgt

$$\beta\gamma^2.\alpha\beta + \beta\alpha^2.\gamma\beta = \beta\alpha.\gamma\beta.(\beta\gamma + \beta\alpha) = \beta\alpha.\gamma\beta.\alpha\gamma$$

und es wird daher

$$13. \quad \alpha A^2.\beta\gamma - \beta B^2.\alpha\gamma + \gamma C^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\alpha\gamma.$$

Man sicht, dass nun auch im Allgemeinen für jede Lage des Punctes M in den Geraden

$$M\alpha^2.\beta\gamma - M\beta^2.\alpha\gamma + M\gamma^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\alpha\gamma$$

werden muss, und hat also auf diese Weise die Gleichung 4, in I. wiedererhalten.

4. Die Gleichung 13 ist einer Erweiterung fähig. Sind nämlich A und A', B und B', C und C' zugeordnete Puncte der Involution, ist N ein beliebiger Punct der Geraden, und sind in dieser die Puncte α, β und γ so genommen, dass der Reihe nach

N und α zu A und A',
N und β zu B und B',
N und γ zu C und C',

zugeordnete harmonische Puncte sind, so lassen sich folgende Doppel-Verhältnisse bilden:

$$\frac{\gamma N}{\gamma\alpha} : \frac{AN}{A\alpha} = \mu, \qquad \frac{\beta N}{\beta\alpha} : \frac{A'N}{A'\alpha} = \mu',$$
$$\frac{\gamma N}{\gamma\beta} : \frac{BN}{B\beta} = \nu, \qquad \frac{\alpha N}{\alpha\beta} : \frac{B'N}{B'\beta} = \nu',$$
$$\frac{\beta N}{\beta\gamma} : \frac{CN}{C\gamma} = \lambda, \qquad \frac{\alpha N}{\alpha\gamma} : \frac{C'N}{C'\gamma} = \lambda',$$

Nehmen wir die Gleichung

$$\mu.\mu' - \nu.\nu' + \lambda.\lambda' = \pi,$$

und für N den unendlich entfernten Punct der Geraden, also für α, β und γ die Halbirungspuncte der Entfernungen $A'A$, $B'B$, CC', so erhalten wir die Gleichung 13, und es wird namentlich $\pi = 1$ ein Werth von π, der auch im obigen Falle ungeändert bleibt, weil jene Gleichungen ihre entsprechenden im Strahlenbüschel haben; folglich ist:

$$\frac{N\gamma.N\beta}{\alpha\gamma.\alpha\beta}\cdot\frac{\alpha A.\alpha A'}{NA.NA'} - \frac{N\gamma.N\alpha}{\beta\alpha.\beta\gamma}\cdot\frac{\beta B.\beta B'}{NB.NB'} + \frac{N\beta.N\alpha}{\gamma\beta.\gamma\alpha}\cdot\frac{\gamma C.\gamma C'}{NC.NC'} = 1,$$

und da vermöge der harmonischen Verhältnisse z. B.

$$\frac{NA}{NA'} = \frac{\alpha A}{\alpha A'}, \text{ oder } \frac{\alpha A}{\alpha A'} = \frac{\alpha A}{NA}$$

ist, so wird

$$14.\quad \frac{N\gamma\cdot N\beta}{\alpha\gamma\cdot\alpha\beta}\frac{\alpha A^2}{NA^2} - \frac{N\gamma\cdot N\alpha}{\beta\gamma\cdot\beta\alpha}\cdot\frac{\beta B^2}{NB^2} + \frac{N\beta\cdot N\alpha}{\gamma\beta\cdot\gamma\alpha}\cdot\frac{\gamma C^2}{NC^2} = 1.$$

Diese Gleichung hat ihre entsprechende im Strahlenbüschel; sie lässt sich also auch unmittelbar auf den Kreis übertragen.

5. Sind wieder A und A', B und B', C und C', D und D' zugeordnete Puncte der Involution und α, β, γ und δ die Halbirungspuncte der Entfernungen AA', BB', CC' und DD', so lässt sich aus der Gleichung

$$\alpha\beta.\gamma\delta + \alpha\delta.\beta\gamma = \alpha\gamma.\beta\delta,$$

indem man sie durch $\alpha\gamma.\beta\delta$ dividirt und die Relationen in **10.** beachtet, die Gleichung

$$15.\quad \frac{AB\cdot AB'}{AC\cdot AC'}\cdot\frac{DC\cdot DC'}{DB\cdot DB'} + \frac{CB\cdot CB'}{CA\cdot CA'}\cdot\frac{DA\cdot DA'}{DB\cdot DB'} = 1$$

bilden. Aus ihr folgt, wenn für D der Centralpunct der Involution genommen wird, nach der Gleichung 1.

$$16.\quad \frac{AB\cdot AB'}{AC\, AC'} + \frac{CB\cdot CB'}{CA\cdot CA'} = 1.$$

Es lassen sich offenbar noch mehrere Gleichungen von dieser Form schreiben, je nachdem die zum Grund gelegte Gleichung für die Puncte α, β, γ und δ in Bezug auf die Relationen in 10. dargestellt wird.

Wenn man die Gleichung 12 in der Form

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} - \frac{MB\cdot MB'}{MC\cdot MC'} + \frac{MA\cdot MA'}{MC\cdot MC'}\cdot\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} = 0$$

aufstellt und für die beiden Puncte A und A' einen der doppelten Puncte z. B. E nimmt, so erhält man

$$\frac{E\beta}{E\gamma} - \frac{MB\cdot MB'}{MC\cdot MC'} + \frac{ME\cdot ME}{MC\cdot MC'}\cdot\frac{\beta\gamma}{E\gamma} = 0,$$

und da nach den Gleichungen in 10.

$$\frac{E\beta}{E\gamma} = \frac{EB\cdot EB'}{EC\cdot EC'},$$

ist, so wird

$$\frac{EB\cdot BB}{EC\cdot EC'} = \frac{MB\cdot MB'}{MC\cdot MC'} - \frac{ME^2}{MC\cdot MC'}\cdot\frac{\beta\gamma}{E\gamma} = 0.$$

Es ist also, je nach der Beschaffenheit der Vorzeichen, immer $\frac{EB'\cdot EB}{EC\, EC'}$ grösser oder kleiner, aber nie gleich $\frac{MB\cdot MB'}{MC\cdot MC'}$.

Das Verhältniss $\frac{MB \cdot MB'}{MC \cdot MC'}$ ist also ein Maximum oder ein Minimum, wenn für M immer der doppelte Punct E oder F genommen wird.

6. Wir stellen uns jetzt einen Strahlenbüschel der Involution gegeben vor, und die Strahlen desselben durch zwei beliebige Gerade N und N' geschnitten. Es seien a und a', b und b', c und c',... die zugeordneten Strahlen der Involution, A und A', B und B', C und C',... die zugeordneten Puncte der Involution in N, und $A_{,}$ und $A_{,}'$, $B_{,}$ und $B_{,}'$, $C_{,}$ und $C_{,}'$... diese in N'. Liegen die Puncte A und $A_{,}$, im Strahle a, A' und $A_{,}'$, im Strahle a', B und $B_{,}$, im Strahle b u. s. w., bezeichnet man die Halbirungspuncte der Entfernungen AA', BB', CC',... durch α, β, γ,..., und die der Entfernungen $A_{,}A_{,}'$, $B_{,}B_{,}'$, $C_{,}C_{,}'$,... durch α', β', γ',..., und nennt jede zwei Punctenpaare A und A' und $A_{,}$ und $A_{,}'$, B und B' und $B_{,}$ und $B_{,}'$,... entsprechende zugeordnete Punctenpaare der Involution beider Geraden, so ist offenbar:

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{A_{,}B_{,}}{A_{,}C_{,}} : \frac{D_{,}B_{,}}{D_{,}C_{,}},$$
$$\frac{AB'}{AC'} : \frac{DB'}{DC'} = \frac{A_{,}B_{,}'}{A_{,}C_{,}'} : \frac{D_{,}B_{,}'}{D_{,}C_{,}'}.$$

Diese beiden Gleichungen multiplicirt, giebt:

$$\frac{AB \cdot AB'}{AC \cdot AC'} : \frac{DB \cdot DB'}{DC \cdot DC'} = \frac{A_{,}B_{,} \cdot A_{,}B_{,}'}{A_{,}C_{,} \cdot A_{,}C_{,}'} : \frac{D_{,}B_{,} \cdot D_{,}B_{,}'}{D_{,}C_{,} \cdot D_{,}C_{,}'}$$

und aus ihnen ergiebt sich mit Hülfe der Gleichungen in 10.

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} : \frac{\delta\beta}{\delta\gamma} = \frac{\alpha'\beta'}{\alpha'\gamma'} : \frac{\delta'\beta'}{\delta'\gamma'},$$

d. h. es sind α und α', β und β', γ und γ', δ und δ' entsprechende Puncte zweier projectivischen Geraden.

Wird also ein Strahlenbüschel in Involution von zwei beliebigen Geraden geschnitten, so sind die Mittelpuncte entsprechender zugeordneter Punctenpaare der Involution in beiden Geraden entsprechende Puncte zweier projectivischen Geraden.

In Bezug auf diese Nummer sehe man die schon erwähnte „Geschichte der Geometrie von *Chasles*“, und zwar Note X.

III.

Die ersten Beziehungen der Theorie der Transversalen.

1. Nimmt man in Fig. 6. ein Dreieck und irgend einen Punct P als gegeben an, zieht von P nach den Ecken des Dreiecks Strahlen, die die Seiten in den Puncten B, D' und A'' schneiden, so lassen sich jede zwei Seiten als projectivisch und perspectivisch liegende Gerade ansehen, die den gemeinschaftlichen Projectionspunct P haben; und jeder beliebige Strahl durch P schneidet dann die Seiten in entsprechenden Puncten C, C' und C''. Bei der Lage der Puncte A, B, C, D in der Figur kann man nach I. offenbar

$$\frac{AB}{AD}:\frac{CB}{CD}=\operatorname{tang}\psi^2,\qquad \frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{1}{\cos\varphi^2},\qquad \frac{AB}{AC}:\frac{DB}{DC}=\sin\varphi^2$$

setzen, und da

$$\sin\varphi^2.\frac{1}{\cos\varphi^2}.\frac{}{\operatorname{tang}\varphi^2}=1$$

ist, die drei Seiten des Dreiecks aber projectivische Geraden sind, so folgt:

$$\left(\frac{AB}{AC}\cdot\frac{DB}{DC}\right).\left(\frac{A'C'}{A'D'}:\frac{B'C'}{B'D'}\right):\left(\frac{A''B''}{A''D''}:\frac{C''B''}{C''D''}\right)=1$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn wir den Strahl CC' der Geraden $B''D''$ parallel legen, wo alsdann der Punct C'' sich in unendlicher Entfernung befindet und bekanntlich

$$\frac{AC}{DC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

wird, die nachstehende:

$$\frac{AB}{DB}.\frac{B'D'}{A'D'}.\frac{A''D''}{A''B''}=1$$

und es ist nothwendig, wie leicht zu sehen, auch für jede Lage des Strahles $C'C'$ durch P:

$$\frac{AC}{DC}.\frac{B'C'}{A'C'}.\frac{C''D''}{C''B''}=1.$$

Nimmt man z. B. jedes solches Verhältniss $\frac{AC}{DC}$ positiv, wenn C ausserhalb der Entfernung AD in der Geraden AD liegt, hingegen negativ, wenn die

Puncte A und D auf verschiedenen Seiten des Punctes C liegen, so erhält man nach den obigen Gleichungen in Fig 7. wo die Seiten des Dreiecks ABC von einer Geraden in den Puncten D, E und G geschnitten werden und wo von den Puncten B und C nach E und D die in P sich schneidenden Geraden BE und CD und durch P die AF gezogen sind, als Gleichung für den Punct P:

$$1.\quad \frac{AD.BF.CE}{AE.CF.BD} = -1$$

und als Gleichung für die in einer Geraden liegenden Puncte D, E und G:

$$2.\quad \frac{AD.BG.CE}{AE.CG.BD} = 1.$$

2. In Fig. 8, sind 4 Gerade AC, AB', BA' und CA' gegeben, welche ein vollständiges Vierseit bilden, und von irgend einem Puncte P sind nach den 6 Ecken des Vierseits Strahlen gezogen. Der Satz, dass sich in jedem Dreiecke die Seiten wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel verhalten, giebt die folgenden Gleichungen:

$$\frac{AB}{PA} = \frac{\sin(ab)}{\sin PBA}, \qquad \frac{PC}{BC} = \frac{\sin PBC}{\sin(bc)},$$
$$\frac{B'C'}{PB'} = \frac{\sin(c'b')}{\sin PC'B'}, \qquad \frac{PA}{AC'} = \frac{\sin PC'A}{\sin(ac')},$$
$$\frac{CA}{PC} = \frac{\sin(a'c)}{\sin PA'B'}, \qquad \frac{PB'}{B'A'} = \frac{\sin PA'B'}{\sin(a'b')}.$$

Wenn man diese Gleichungen mit einander multiplicirt, und beachtet, dass nach der Gleichung 2.

$$\frac{AB.B'C'.CA'}{BC.AC'.B'A'} = 1$$

ist, und dass die Sinusse der Winkel, die sich zu zwei rechten Winkeln ergänzen, gleich sind, so folgt:

$$\sin(ab).\sin(c'b').\sin(a'c) = \sin(a'b').\sin(ac').\sin(bc).$$

Diese Gleichung ist aber in II. die erste der Gleichungen 4., wenn diese auf einen Strahlenbüschel in Involution übertragen wird, also sind,

Wenn man von irgend einem Puncte P *nach den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits Strahlen zieht, diese Strahlen in Involution.*

Es lässt sich von diesem Satze, auf die Bemerkung gegründet, dass es in Bezug auf zwei zugeordnete Strahlenpaare der Involution zu jedem fünften Strahle nur einen bestimmten sechsten zugeordneten Strahl giebt, sogleich eine Anwendung machen.

Man nehme in Fig. 9, irgend ein einem Kegelschnitte eingeschriebenes Dreieck ABC an, schneide seine Seiten durch irgend eine Gerade in den Puncten A', B' und C', und ziehe von einem beliebigen Puncte P des Kegelschnitts nach den 6 Puncten A, B, C, A', B', C' Strahlen: so sind diese in Involution. Diese 6 Strahlen schneiden den Kegelschnitt, ausser in den drei Puncten $A, B, C,$ noch in drei neuen Puncten a', b' und c', und zieht man nach diesen 6 Puncten von irgend einem zweiten Puncte P' des Kegelschnitts Strahlen, so werden dieselben ebenfalls in Involution sein, und es folgt aus der Zuordnung dieser Strahlen, dass die Durchschnitte D, E und G von AB und $P'c'$, AC und $P'b'$, BC und $P'a'$ in einer Geraden liegen.

Ist also einem Kegelschnitte ein Dreieck ABC *eingeschrieben, und werden seine Seiten* AB, AC, BC *der Reihe nach von einer Geraden in den Puncten* C', B', A' *geschnitten; zieht man dann von einem Puncte* P *des Kegelschnitts nach letztern drei Puncten Strahlen, die ihm in den Puncten* c', b', a', *begegnen, und von einem zweiten Puncte desselben nach diesen Puncten* c', b' *und* a' *Strahlen: so liegen die Durchschnitte* D, E *und* G *von* AB *und* P'c', AC *und* P'b', BC *und* P' a' *in einer Geraden.*

Ist der Kegelschnitt inbesondere ein Kreis, und nimmt man die Puncte A', B', C' in der unendlich entfernten Geraden an, die Puncte P und P' aber als Endpuncte eines Durchmessers des Kreises, so zeigt sich, dass,

Wenn man von einem Puncte P' *eines Kreises auf die Seiten eines ihm eingeschriebenen Dreiecks Senkrechte zieht, deren Fusspuncte in einer Geraden liegen.*

3. Es seien in Fig. 10. von einem Puncte P naeh den Ecken eines Dreiecks ABC Gerade gezogen, die die Seiten des Dreiecks in den Puncten D, F und F schneiden, und es seien G, H und K der Reihe nach die Durchschnitte der Geradenpaare DE und BC, EF und AB, DF und AC, so haben wir, in Folge der harmonischen Beziehungen, nach S. 75:

$$\frac{BF}{CF} : \frac{BG}{CG} = -1,$$

$$\frac{AD}{BD} : \frac{AH}{BH} = -1,$$

$$\frac{CE}{AE} : \frac{CK}{AK} = -1,$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Multiplication

$$\frac{BF.AD.CE}{CF.BD.AE} \cdot \frac{AK.BH.CG}{AH.BG.CK} = -1.$$

Der erste Ausdruck links ist hier die Gleichung des Punctes P, und wird daher $= -1$, also ist nothwendig

$$\frac{AK.BH.CG}{AH.BG.CK} = 1;$$

d. h. die Puncte G, H und K liegen in einer Geraden.

Aus den letztern Gleichungen lässt sich aber auch die Gleichung

$$\frac{BF.BG}{CF.CG}\cdot\frac{AD.AH}{BD.BH}\cdot\frac{CE.CK}{AE.AK} = -1$$

aufstellen, und sind α, β und γ die Halbirungspuncte von BC, AB und AC, α', β' und γ' aber die Halbirungspuncte der Entfernungen FG, DH, EK, so lassen sich, in Folge der harmonischen Beziehungen, in jeder Seite des Dreiecks ABC die beiden Eckpuncte als doppelte Puncte der Involution ansehen, und es sind der Reihe nach in diesen Seiten F und G, D und H, E und K zugeordnete Puncte der Involution. Nach den Gleichungen 8. in II. wird jetzt

$$\frac{BF.BG}{CF.CG} = \frac{B\alpha'.\alpha B}{C\alpha'.\alpha C},$$

$$\frac{AD.AH}{BD.BH} = \frac{A\beta'.\beta A}{B\beta'.\beta B},$$

$$\frac{CE.CK}{AE.AK} = \frac{C\gamma'.\gamma C}{A\gamma'.\gamma A},$$

und aus diesen Gleichungen wird nach der vorhergehenden

$$\frac{B\alpha'.A\beta'.C\gamma'}{C\alpha'.B\beta'.A\gamma'}\cdot\frac{B\alpha.A\beta.C\gamma}{C\alpha.B\beta.A\gamma} = -1.$$

Da sich aber, wie bekannt und auch hier sehr leicht ersichtlich ist, die Geraden $B\gamma$, $C\beta$ und $A\alpha$ in einem Puncte schneiden, so folgt:

$$\frac{B\alpha'.A\beta'.C\gamma'}{C\alpha'.B\beta'.A\gamma'} = 1,$$

d. h. die Puncte α', β' und γ' liegen in einer Geraden. Es sind aber die Geraden EK, FG, DH die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits, welches von den Geraden DF, DE, FF, und GK gebildet wird, also ist bewiesen, dass

In jedem vollständigen Vierseit die Halbirungspuncte der drei Diagonalen in einer Geraden liegen.

4. Dieser letzte Satz ist einer Erweiterung fähig, welche in gegenwärtigem Journal im 19. Bande S. 227 bewiesen ist. Wir wollen diesen Satz auch hier entwickeln.

Es seien in Fig. 11. die 4 Geraden DE, DF, FE und GH gegeben, die ein vollständiges Vierseit bilden, DK, GE und FH seien die drei Diagonalen desselben, und A, B, C die gegenseitigen Durchschnitte dieser Diagonalen; ferner O, O' und O'' die drei Halbirungspuncte der Diagonalen, die also in einer Geraden liegen. Werden nun die Diagonalen durch irgend eine Gerade in den Puncten α, β und γ geschnitten, und werden in den Diagonalen zu α in Bezug auf D und K, zu β in Bezug auf G und E, und zu γ in Bezug auf F und H die vierten zugeordneten harmonischen Puncte α', β' und γ' gesucht, so sollen letztere Puncte in einer Geraden liegen. In der Geraden DK sind bekanntlich nach S. 75, die Puncte A und C zu D und K zugeordnete harmonische Puncte, und da auch α und α' zu D und K in dieser Beziehung stehen, so können wir α und α', A und C als zugeordnete Puncte der Involution ansehen, zu denen D und K doppelte Puncte sind. Nach den Gleichungen 9. in II. haben wir, weil C der Centralpunct der Involution ist,

$$\frac{C\alpha.C\alpha'}{A\alpha.A\alpha'} = \frac{OC}{OA}.$$

Dieselben Beziehungen finden auch in den beiden andern Diagonalen Statt, und es ist namentlich

$$\frac{B\beta.B\beta'}{C\beta.C\beta'} = \frac{O'B}{O'C},$$

$$\frac{A\gamma.A\gamma'}{B\gamma.B\gamma'} = \frac{O''A}{O''B}.$$

Werden diese drei Gleichungen multiplicirt, und beachtet man, dass sowohl die Puncte O, O' und O'', als auch α, β und γ in einer Geraden liegen, so folgt nothwendig

$$\frac{C\alpha'.B\beta'.A\gamma'}{A\alpha'.C\beta.B\gamma'} = 1,$$

d. h. die Puncte α', β' und γ' liegen in einer Geraden.

Dreht sich die Gerade der Puncte α, β γ um einen Punct P, so werden in der Geraden BC, in Folge der Involution der Puncte, die Puncte β und β' stets entsprechende Puncte zweier sich deckenden projectivischen Geraden sein. Dasselbe gilt für die Puncte α und α, und γ und γ', und da die Puncte α, β und γ in einem Strahle des Strahlenbüschels P liegen, so haben wir einen Strahlenbüschel P, der mit den drei Geraden AB, AC und BC projectivisch ist, und jedem Strahle $P\alpha$ von P entsprechen drei Puncte α', β' und γ', die in einer Geraden liegen; folglich sind diese Puncte entsprechende

Puncte jener drei projectivischen Geraden. Wenn also die Gerade $\alpha\beta$ sich um einen Punct P dreht, so wird die Gerade $\alpha'\beta'$ im Allgemeinen einen Kegelschnitt umhüllen, der auch die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits berührt (S. 139).

Werden demnach die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits durch eine Gerade $\alpha\beta$ geschnitten, und bestimmt man in jeder Diagonale zu diesem Durchschnitte in Bezug auf ihre Endpuncte den vierten zugeordneten harmonischen Punct, so liegen diese drei Puncte in einer zweiten Geraden $\alpha'\beta'$; und dreht sich die Gerade $\alpha\beta$ um einen Punct P, *so wird $\alpha'\beta'$ im Allgemeinen einen Kegelschnitt umhüllen, der auch die drei Diagonalen des Vierseits zu Tangenten hat.*

5. Werden in Fig. 12. die Seiten eines Dreiecks ABC von einer beliebigen Geraden in den Puncten O, O' und O'' geschnitten, so können wir in jeder Seite diesen Durchschnitt mit der Geraden zum Centralpunct und ihre Endpuncte zu zugeordneten Puncten nehmen wodurch die Involution bestimmt ist und zu jedem fünften Puncte ein zugeordneter sechster Punct gefunden werden kann. Sind also auf diese Weise in den Seiten:

AB der Centralpunct O, und A und B, P und P',
AC der Centralpunct O', und A und C, Q und Q',
BC der Centralpunct O'', und B und C, R und R',

zugeordnete Puncte der Involution, so haben wir nach der Gleichung 9. in II.

$$\frac{AP.AP'}{BP.BP'} = \frac{OA}{OB}, \quad \frac{CQ.CQ'}{AQ.AQ'} = \frac{O'C}{O'A}, \quad \frac{BR.BR'}{CR.CR'} = \frac{O''B}{O''C},$$

und weil die Puncte O, O' und O'' in einer Geraden liegen, also nothwendig

$$\frac{OA.O'C.O''B}{OB.O'A.O''C} = 1,$$

ist, so folgt auch

$$3. \quad \frac{AP.AP'.BR.BR'.CQ.CQ'}{BP.BP'.AQ.AQ'.CR.CR'} = 1;$$

und umgekehrt kann aus dieser Gleichung gefolgert werden, dass die Puncte O, O' und O'' in einer Geraden liegen.

Die Puncte Q'', R'' und P'' sind der Reihe nach die Durchschnitte der Geradenpaare $P'R$ und AC, PQ und BC, $Q'R'$ und AB, und wir haben für die drei Geraden PQ, $P'R$, $Q'R'$ die drei Gleichungen

$$\frac{AP.CQ.BR''}{BP.AQ.CR''} = 1,$$
$$\frac{AP'.BR.CQ''}{BP'.CR.AQ''} = 1,$$
$$\frac{CQ'.BR'.AP''}{AQ'.CR'.BP''} = 1.$$

Werden diese drei Gleichungen multiplicirt, und wird dabei die Gleichung 3. beachtet, so folgt:

$$\frac{BR''.CQ''.AP''}{CR''.AQ''.BP''} = 1,$$

d. h. die Puncte P'', Q'' und R'' liegen in einer Geraden.

Wir haben also zwei Dreiecke ABC und DEF, oder ein Sechseck $PP'RR'QQ'$, in welchem sich die gegenüberliegenden Seitenpaare in Puncten einer Geraden schneiden, und für welche offenbar umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die Gleichung 3. existirt.

6. Man weiss, dass jede zwei schiefliegende projectivische Strahlenbüschel einen Kegelschnitt erzeugen, der durch ihre Mittelpuncte geht, und im Allgemeinen durch fünf Puncte gegeben ist (S. 139). Sind Fig. 13. P und P' die Mittelpuncte dieser Strahlenbüschel, a und a', b und b', c und c', ... ihre entsprechenden Strahlenpaare, deren Durchschnitte $A, B, C, \ldots.$ in einem Kegelschnitte liegen (die Strahlen von P' sind in der Figur nicht gezeichnet), so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(cb)}{\sin(cd)} = \frac{\sin(a'b')}{\sin(a'd')} : \frac{\sin(c'b')}{\sin(c'd')},$$

und wenn man unter $a, b, c, a', b', \ldots$ die Längen $PA, PB, PC, P'A, \ldots.$ versteht, lässt sich aus dieser Gleichung auch die Gleichung

$$\frac{a.b.\sin(ab)}{a.d.\sin(ad)} : \frac{c.b.\sin(cb)}{c.d.\sin(cd)} = \frac{a'.b'.\sin(a'b')}{a'.d'.\sin(a'd')} : \frac{c'.b'.\sin(c'b')}{c'.d'.\sin(c'd')}$$

bilden, und aus ihr ergiebt sich nach bekannten Sätzen von dem Inhalt dem Dreiecke:

$$\frac{ABP}{ADP} : \frac{CBP}{CDP} = \frac{ABP'}{CDP'} : \frac{CBP'}{CDP'}$$

Sind p, q, r und s der Reihe nach die Senkrechten von P auf AB, CB, CD und AD, und p', q', r' und s' der Reihe nach die Senkrechten auf jene Geraden von P' aus, so folgt aus der letztern Gleichung:

$$\frac{p.AB}{s.AD} : \frac{q.CB}{r.CD} = \frac{p'.AB}{s'.AD} : \frac{q'.CB}{r'.CD}$$

oder

$$\frac{p\cdot r}{q\cdot s}=\frac{p'\cdot r'}{q'\cdot s'}.$$

Bleiben die vier Puncte A, B, C und D fest, und lässt man P sich in dem gegebenen Kegelschnitte fortbewegen, so bleibt offenbar der Ausdruck links des Gleichheitszeichens constant und dem Ausdrucke rechts, den wir α nennen wollen, gleich, und man erhält:

$$4.\quad p\cdot r=\alpha\cdot q\cdot s.$$

Ist demnach ein Viereck ABCD *gegeben, und bewegt sich ein Punct* P *in einem Kegelschnitte, der jenem Vierecke umschrieben ist, so ist das Verhältniss der Producte der Entfernungen von* P *von den gegenüberliegenden Seitenpaaren des Vierecks constant.*

Zieht man die Gerade PP' in Fig. 13. und bezeichnet ihre Durchschnitte mit AD, BC, AC, BD, AB und DC durch a, α', β, β', γ und γ', so folgt aus der Gleichung

$$\frac{p}{p'}\cdot\frac{r}{r'}=\frac{q}{q'}\cdot\frac{s}{s'}$$

die nachstehende:

$$\frac{P\beta}{P'\beta}\cdot\frac{P\beta'}{P'\beta'}=\frac{P\alpha'}{P'\alpha'}\cdot\frac{P\alpha}{P\alpha},$$

und hieraus wieder

$$5.\quad \frac{P\beta\cdot P\beta'}{P\alpha\cdot P\alpha'}=\frac{P'\beta\cdot P'\beta'}{P'\alpha\cdot P'\alpha'};$$

das heisst, nach den Gleichungen 5. in II. sind P und P', α und α', β und β' zugeordnete Puncte der Involution in PP'. Da die Involution von Puncten in einer Geraden durch zwei Paar zugeordnete Puncte bestimmt ist, so folgt, dass

Alle Kegelschnitte, die demselben Vierecke umschrieben sind, von jeder beliebigen Transversale in Puncten der Involution geschnitten werden und dass die in einem Kegelschnitte liegenden Durchschnitte zugeordnete Puncte der Involution sind.

Für jeden Kegelschnitt kann ein Seitenpaar des allen eingeschriebenen Vierecks genommen werden, und es zeigt sich insbesondere, dass

Die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks von jeder Transversale in Puncten der Involution geschnitten werden.

Wenn die Transversale einen jener Kegelschnitte berührt, so ist der Berührungspunct ein doppelter Punct der Involution; die doppelten Puncte sind aber immer paarweise vorhanden, folglich

Sind durch vier Puncte im Allgemeinen zwei Kegelschnitte möglich, die eine gegebene Gerade berühren.

17. Werden in Fig. 14. die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks von einer beliebigen Transversale N in den zugeordneten Puncten α und α', β und β', γ und γ' der Involution geschnitten; sind x, y und z die Halbirungspuncte der Entfernungen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$, und P, Q und R die Durchschnitte der Seitenpaare des Vierecks: so schneiden sich die Geraden Px, Qy und Rz in einem Puncte S. Denn rückt die N mit ihrer Richtung parallel fort, so bewegen sich die Halbirungspuncte x, y und z offenbar in Geraden, die durch die Puncte P, Q und R gehen; die Geraden Px und Qy schneiden sich in einem Puncte S, und legt man durch ihn eine der N parallele Transversale, so fallen in ihr die Halbirungspuncte zweier zugeordneten Punctenpaare der Involution zusammen, folglich auch alle diese Halbirungspuncte; denn die Involution ist jetzt durch zwei sich deckende, ungleich liegende und projectivisch gleiche Geraden gegeben.

Werden demnach die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks durch irgend eine Transversale geschnitten, und nimmt man in ihr die Halbirungspuncte der Entfernungen der Durchschnitte mit jedem Seitenpaare und verbindet jeden dieser Halbirungspuncte mit dem Durchschnitte des zugehörigen Seitenpaares durch Geraden, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Puncte.

Wir werden später auf eine weitere Ausdehnung dieses Satzes kommen.

8. Es lässt sich in der Gleichung 5. offenbar (Fig. 13)

$$\frac{P\beta\cdot P\beta'}{P\alpha\cdot P\alpha'}=\mu\cdot\pi$$

setzen, wo alsdann

$$\mu=\frac{p\cdot r}{q\cdot s}$$

ist, also μ constant bleibt, für jeden Punct P desselben Kegelschnitts, und π eine Function der Sinusse der Winkel ist, unter denen die PP' die Seiten des Vierecks $ABCD$ schneidet. Begegnet die PP' einem zweiten, dem Vierecke umschriebenen Kegelschnitte in Q und Q', so wird

$$\frac{Q\beta\cdot Q\beta'}{Q\alpha\cdot Q\alpha'}=\lambda\cdot\pi,$$

wo π denselben Werth wie oben hat, und π allein von dem Kegelschnitte abhängig ist, in welchem sich Q befindet. Aus beiden Gleichungen folgt aber

$$\frac{P\beta \cdot P\beta'}{P\alpha \cdot P\alpha'} : \frac{Q\beta \cdot Q\beta'}{Q\alpha \cdot Q\alpha'} = \frac{\mu}{\lambda} :$$

eine Gleichung, welche von der Richtung der PP' unabhängig ist. Aus ihr zeigt sich nach II. §. 6. Folgendes:

Sind eine Reihe von Kegelschnitten einem Vierecke umschrieben, und werden sie von zwei beliebigen Transversalen N *und* N' *geschnitten, so sind* N *und* N' *projectivische Gerade in Bezug auf die Halbirungspuncte der in ihnen liegenden Sehnen der Kegelschnitte; und zwar sind die Halbirungspuncte der Sehnen desselben Kegelschnitts entsprechende Puncte der projectivischen Geraden.*

Sind die beiden Transversalen N und N' parallel, so sind die eben erwähnten projectivischen Geraden offenbar ähnlich und liegen projectivisch, und nach dem vorigen §., weil drei Strahlen PS, QS und RS fest bleiben, wenn N mit sich parallel fortrückt, folgt, dass

Die Halbirungspuncte paralleler Sehnen eines Kegelschnitts in einer Geraden liegen.

Die Gerade, welche die Halbirungspuncte paralleler Sehnen eines Kegelschnitts enthält, heisst der der Richtung dieser Sehne zugeordnete Durchmesser, also:

Alle einer gegebenen Richtung zugeordneten Durchmesser einer Reihe in vier Puncten sich schneidender Kegelschnitte begegnen sich in einem Puncte S.

Es ist ferner aus dem vorigen §. ersichtlich, dass

Nach jeder beliebigen Richtung eine bestimmte Transversale gezogen werden kann, die eine Reihe einem Vierecke umschriebener Kegelschnitte so schneidet, dass in ihr die beiden durch jede zwei Kegelschnitte begrenzten Abschnitte gleich werden.

9. Ist in Fig. 15. einem Kegelschnitte ein Viereck $QRR'Q'$ eingeschrieben, und werden die Seiten desselben und der Kegelschnitt von einer beliebigen Geraden in den Puncten A und B, S und S', P und P' geschnitten, so ist nach Gleichung 5.

$$\frac{AP \,.\, AP'}{AS \,.\, AS'} = \frac{BP \,.\, BP'}{BS \,.\, BS'}.$$

Die Seiten des Dreiecks ABC werden aber von zwei Geraden in R, Q und S und in R', Q' und S' geschnitten: es ist daher

$$\frac{CQ \,.\, BR \,.\, AS}{CR \,.\, BS \,.\, AQ} = 1, \qquad \frac{CQ' \,.\, BR' \,.\, AS'}{CR' \,.\, BS' \,.\, AQ'} = 1$$

Diese beiden Gleichungen multiplicirt, und die vorhergehende beachtet, giebt

$$6.\quad \frac{AP.AP'.BR.BR'.CQ.CQ'}{BP.BP'.AQ.AQ'.CR.CR'} = 1.$$

Diese Gleichung ist dieselbe, wie die Gleichung 3 in §. 5., und es zeigt sich folglich, dass

In jedem Sechsecke PP′ R′R QQ′ *im Kegelschnitte die Durchschnitte der drei Seitenpaare* PP′ *und* Q′R, RR′ *und* QP, QQ′ *und* PR′ *in einer Geraden liegen.*

Nehmen wir jetzt, wie in §. 5., in jeder Seite des Dreiecks ABC die beiden Eckpuncte und ihre Durchschnitte mit dem Kegelschnitte zu zugeordneten Puncten der Involution, so liegen die drei Centralpuncte der Involution der drei Seiten in einer Geraden, und durch zwei derselben ist folglich der dritte gegeben. Dies führt unmittelbar zu den Lösungen folgender Aufgaben, welche leicht zu finden sind.

Aufgaben. Einen Kegelschnitt zu construiren,

a) der durch fünf gegebene Puncte geht;

b) der durch vier Puncte geht, und eine gegebene Gerade zur Tangente hat;

c) der durch drei Puncte geht, und eine gegebene Gerade in einem bestimmten Puncte berührt;

d) der durch zwei Puncte geht, eine gegebene Gerade in einem bestimmten Puncte berührt, und eine zweite Gerade zur Tangente hat;

e) der zwei Geraden in gegebenen Puncten berührt und entweder durch einen dritten Punct geht, oder eine dritte Gerade zur Tangente hat.

Es ist ersichtlich, dass die Bedingung, es solle eine Gerade in einem gegebenen Puncte berührt werden, hier für zwei gegebene Puncte gilt, und dass die zweite und vierte Aufgabe zwei Kegelschnitte, die ihnen genügen, geben.

IV

Beweise der Sätze im Anhange No. 56.

1. *Beweise des Satzes links.* Sind in Fig. 16. in einer Geraden M drei Puncte A, B, C und in einer Geraden M' drei Puncte A', B', C' gegeben,

und nehmen wir an, dass sich im Durchschnitte von M und M' die Puncte D und D' dieser Geraden decken, so stellen wir uns zuerst die Puncte C und C' als gar nicht vorhanden vor, und nehmen D und D', A und B', B und A' zu entsprechenden Puncten zweier projectivischen Geraden, die folglich perspectivisch liegen und einen Punct a erzeugen, den Durchschnitt von BA' und AB'; in Bezug auf ein viertes entsprechendes Punctenpaar E und E' dieser Geraden ist

$$1.\quad \frac{AD}{AE}:\frac{BD}{BE}=\frac{B'D'}{B'E'}:\frac{A'D'}{A'E'}.$$

Lassen wir jetzt die Puncte B und B' unbeachtet, nehmen D und D', A und C', C und A' als entsprechende Punctenpaare von projectivischen Geraden, die perspectivisch liegen und den Punct b erzeugen, so folgt für ein beliebiges viertes entsprechendes Punctenpaar E und E':

$$2.\quad \frac{AD}{AE}:\frac{CD}{CE}=\frac{C'D'}{C'E'}:\frac{A'D'}{A'E'}$$

Liegen für beide Gleichungen die Puncte E und E' in dem Strahle ab, sind sie folglich dessen Durchschnitte mit M und M', so geben die Gleichungen 1. und 2. folgende Gleichung:

$$3.\quad \frac{BD}{BE}:\frac{CD}{CE}=\frac{C'D'}{C'E'}:\frac{B'D'}{B'E'}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass auch D und D', B und C', C und B' als entsprechende Puncte zweier projectivischen und perspectivisch-liegenden Geraden angesehen werden können, die einen Punct c erzeugen, der mit den beiden Puncten a und b in einer Geraden EE' oder N liegt. Wir bezeichnen jeden der Puncte a, b und c durch p, und finden Folgendes:

Liegen in einer Geraden M *drei Puncte* A, B, C, *und in einer zweiten Geraden* M′ *drei Puncte* A′, B′, C′, *so liegen die drei Durchschnitte* p *der Geradenpaare* AB′ *und* A′B, AC′ *und* A′C, BC′ *und* B′C *in einer Geraden* N.

Behält man die Bezeichnung der drei Puncte in M' bei, bezeichnet zwar die Puncte von M durch A, B, C, bildet aber die Versetzungen dieser Buchstaben an die Puncte, so giebt der obige Beweis, weil die Zahl dieser Versetzungen sechs ist, im Ganzen sechs Geraden N und 18 Puncte p.

Die sechs Puncte beider Geraden M *und* M′ *lassen sich also paarweise durch neun Geraden verbinden, welche sich paarweise in* 18 *Puncten*

p *schneiden, und von diesen* 18 *Puncten* p *liegen sechs mal drei in einer Geraden* N.

Nach S. 73, werden sich in zwei Dreiecken, in denen sich die Seiten paarweise in Puncten einer Geraden schneiden, die Verbindungslinien der diesen Seiten gegenüberliegenden Ecken in einem Puncte begegnen; durch die drei Puncte a, b, c erhalten wir aber zwei solche Dreiecke und finden also, dass

Von den sechs Geraden N *drei und drei durch einen Punct* P *gehen, und dass es also zwei solcher Puncte* P *giebt.*

2. *Beweis des Satzes rechts.* Schneiden sich drei Strahlen a, b, c in einem Puncte P und drei Strahlen a', b', c' in einem Puncte P', und nehmen wir an, dass in PP' sich die Strahlen d und d' decken, so schneiden wir die Strahlen a, b, c und d von P durch eine Gerade M in den Puncten A, B, C und D, und die Strahlen a', b', c' und d' von P' durch eine Gerade M' in den Puncten A', B', C' und D', und führen nun den Beweis so wie oben in 1. in den Geraden M und M'. Beachtet man ferner den Satz: dass wenn sich die Verbindungslinien dreier Eckenpaare zweier Dreiecke in einem Puncte, schneiden, die Seitenpaare der Dreiecke sich in Puncten einer Geraden begegnen, so folgt, dass:

Wenn in jedem von zwei Strahlenbüscheln P *und* P' *drei beliebige Strahlen angenommen werden, diese sich paarweise in neun Puncten schneiden, durch welche sich paarweise* 18 *Gerade* p *legen lassen, von welchen sechs mal drei durch einen Punct* N *gehen; und von diesen sechs Puncten* N *liegen drei und drei in einer Geraden.*

Wir werden später auf diese Sätze zurückkommen.

V.

Lage von Puncten in einem Kegelschnitte oder in einem Systeme von zwei Geraden.

---

1. Sind zwei projectivische Gerade M und M' gegeben, sind A, B, C,... die Puncte von M und A', B', C',..... die Puncte von M', und sind A und

A', B und B', C und C',..... entsprechende Puncte derselben, so sagen wir: der Punct A sei auf M' bezogen, wenn man sich von A nach allen Puncten von M' Strahlen gezogen vorstellt; wobei also A als Strahlenbüschel mit M' projectivisch ist. Beziehen wir den Punct A auf M' und A' auf M, so bilden A und A' projectivische Strahlenbüschel und es sind AB' und $A'B$, $A'C$ und $A'C$,..... entsprechende Strahlen derselben.

Wenn die beiden Geraden M und M' perspectivisch liegen, und man beziehet A auf M' und A' auf M, so werden die beiden, ebenfalls perspectivisch liegenden Strahlenbüschel A und A' eine Gerade N erzeugen, die durch den Durchschnitt von M und M' geht, und dieselbe Gerade N wird z. B. auch durch B und B' auf M' und M bezogen erzeugt, weil sie mit ihr den Durchschnitt von M und M' und von AB' und A'B gemein hat.

Liegen hingegen die Geraden M und M' schief, und bezieht man A auf M', A' auf M, so liegen offenbar die projectivischen Strahlenbüschel A und A' ebenfalls perspectivisch und erzeugen eine Gerade N, in welcher die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, AE' und $A'E$,.... liegen. Es sei in Fig. 17., P der Durchschnitt von AE' und $A'E$, und man ziehe durch P die beiden Strahlen BF' und $B'F$, welche M' und M in F und F' schneiden, so ist in Bezug auf den Strahlenbüschel P:

$$\frac{FA}{FB} : \frac{EA}{EB} = \frac{B'E'}{B'F'} : \frac{A'E'}{A'F'},$$

und aus dieser Gleichung folgt, dieselbe nur anders geschrieben,

$$\frac{FA}{FB} : \frac{EA}{EB} = \frac{F'A'}{F'B'} : \frac{E'A'}{E'B'},$$

d. h. es sind zu A und A', B und B', C und C', E und E', auch F und F' entsprechende Puncte der obigen projectivischen Geraden M und M'. Bezieht man, statt wie oben A und A', jetzt B und B' auf M' und M, so werden die perspectivischen Strahlenbüschel B und B' auch eine Gerade erzeugen, die mit der obigen Geraden N dieselbe ist, da sie mit ihr den Punct P und den Durchschnitt von AB' und $A'B$ gemein hat.

Sind also zwei projectivische Gerade gegeben, und bezieht man irgend zwei entsprechende Puncte derselben, jeden auf die nicht zugehörige Gerade, als projectivische und perspectivisch liegende Strahlenbüschel, auf sie, so erzeugen diese Strahlenbüschel stets dieselbe Gerade, welche jener entsprechenden Punctenpaare auch genommen werden mögen.

Zwei projectivische Gerade sind aber durch drei entsprechende Punctenpaare gegeben, als A und A', B und B', C und C': es ist daher wieder der Satz bewiesen, dass die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$ in einer Geraden liegen: ein Satz, welcher in der vorigen Nummer schon enthalten ist. Wir haben absichtlich diesen Weg hier gewählt, obgleich sich der obige Satz unmittelbar aus der Bemerkung ergiebt, dass M und M', AA', BB', CC',.... Tangenten eines Kegelschnitts sind und dass die obige Gerade N zur Berührungssehne der Tangenten M und M' wird.

2. Man nehme jetzt irgend einen Kegelschnitt als gegeben an, und irgend einen Punct P desselben zum Mittelpuncte zweier concentrisch liegenden projectivischen Strahlenbüschel. $a, b, c,$... sind die Strahlen des einen, a', b', c'.... die Strahlen des andern, und a und a', b und b', c und c',... sind entsprechende Strahlen beider Strahlenbüschel. Man bezeichne ferner durch $A, B, C,$..... der Reihe nach die Durchschnitte von $a, b, c,$...., und durch A', B', C',.... der Reihe nach die Durchschnitte von a', b', c',.... mit dem gegebenen Kegelschnitte. Die Puncte A, B, C,... bilden ein Vieleck M, die Puncte A', B', C'.... ein Vieleck M', von einer unbestimmten, unendlichen Zahl von Ecken und Seiten, und wir nennen M und M' projectivische Vielecke des Kegelschnitts und A und A', B und B', C und C''.... deren entsprechende Punctenpaare.

In den zwei projectivischen Vielecken eines Kegelschnitts liegen zwei projectivische Strahlenbüschel, wie oben, zum Grunde, und aus der Vergleichung der erstern mit den letztern folgt, dass

Zwei projectivische Vielecke eines Kegelschnitts durch drei entsprechende Punctenpaare bestimmt sind.

Und dass es entweder zwei, einen, oder keinen Punct des Kegelschnitts giebt, in denen sich entsprechende Puncte der projectivischen Vielecke decken.

Bezieht man in den projectivischen Vielecken M und M' die Puncte A auf M' und A' auf M, so sind A und A' Mittelpuncte projectivischer Strahlenbüschel, welche perspectivisch liegen und eine Gerade N erzeugen, in welcher die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare AB' und $A'B$, AC' und $A'C$,..... liegen. Die Gerade N schneidet den Kegelschnitt in zwei Puncten, berührt ihn, oder trifft ihn gar nicht, je nachdem es im Kegelschnitte zwei, einen, oder keine Puncte giebt, in welchen sich entsprechende Puncte von M und M' decken. In den beiden ersten Fällen ist ohne Beweis

ersichtlich (nemlich, wenn die Gerade N dem Kegelschnitte begegnet), dass jede zwei andre entsprechende Puncte z. B. B und B' auf M' und M (B auf M' und B' auf M) wie oben A und A' bezogen, dieselbe Gerade N erzeugen.

3. Haben die beiden concentrischen Strahlenbüschel, welche die Vielecke M und M' des Kegelschnitts bestimmen, eine solche Lage, dass sie einen Strahlenbüschel in Involution bilden, so dass die Lage dieser Strahlen mit der Lage der Puncte der Vielecke übereinstimmt: sind also A und A', D und D' entsprechende Puncte von M und M', und fallen die Puncte A und D' zusammen, so decken sich auch die Puncte A und D', weil eine ähnliche Lage der Strahlen im Strahlenbüschel der Involution besteht.

Bezieht man jetzt in Fig. 18. den Punct A auf M' und A' auf M, so erzeugen diese projectivischen Strahlenbüschel A und A' eine Gerade N, und da sich jetzt die Puncte B und E', B' und E, C und F', C' und F,.... der Vielecke M und M' decken, so liegen offenbar die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AB und $A'B'$, AC' und $A'C$, AC und $A'C'$,..... in derselben Geraden N. Man erhält also durch A und A' dieselbe Gerade N, wenn man beide Puncte gleichzeitig auf beide Systeme M und M' bezieht.

In einem Strahlenbüschel in Involution giebt es entweder zwei oder keine doppelten Strahlen, in welchen sich entsprechende Strahlen der concentrisch-projectivischen Strahlenbüschel decken. Sind diese doppelten Strahlen vorhanden, so giebt es auch im Kegelschnitte zwei doppelte Puncte, in welchen entsprechende Puncte G und G', H und H' der Vielecke M und M' zusammenfallen. In diesem Falle, wo die doppelten Puncte vorhanden sind, erzeugen jede zwei entsprechenden Puncte von M und M' dieselbe Gerade N, die durch die doppelten Puncte geht; es schneiden sich also nicht allein AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$,......, sondern auch AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C'$,..... in Puncten von N. Wir erhalten folglich zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$, in denen sich die Seiten paarweise in N schneiden; folglich gehen nach S. 79. die Verbindungslinien AA', BB', CC' der Ecken durch einen Punct S; in diesem Puncte S schneiden sich offenbar auch die Tangenten des Kegelschnitts durch die doppelten Puncte von M und M', und S liegt daher ausserhalb desselben. Es ist umgekehrt leicht ersichtlich, dass jede Gerade durch S dem Kegelschnitte in entsprechenden Puncten von M und M' begegnet.

4. Jede zwei beliebige projectivische Vielecke eines Kegelschnitts nennen wir im Allgemeinen *schief liegend;* hingegen in dem Falle des vorigen §.

perspectivisch liegend. Aus den Beziehungen eines Strahlenbüschels in Involution folgt, dass

Zwei perspectivisch liegende Vielecke eines Kegelschnitts durch zwei entsprechende Punctenpaare bestimmt werden, und entweder zwei oder keine doppelten Puncte haben.

Nach der Bezeichnung in §. 2. ist nothwendig

$$1.\quad \frac{\sin(ab)}{\sin(ad)}:\frac{\sin(cb)}{\sin(cd)}=\frac{\sin(a'b')}{\sin(a'd')}:\frac{\sin(c'b')}{\sin(c'd')},$$

und wenn man für diese projectivischen Strahlenbüschel die Vielecke M und M' des Kegelschnitts einführt, schreiben wir dafür

$$2.\quad (A, C, B, D) = (A', C', B', D'),$$

d. h. es sind A und A', C und C', B und B', D und D' entsprechende Puncte von M und M', und zieht man von irgend einem Puncte P des Kegelschnitts nach diesen Puncten Strahlen, so erhält man im Strahlenbüschel P die Gleichung 1. wieder. Aus der Gleichung 2. bildet sich sogleich die folgende mit Hülfe der in 1., wenn der Kegelschnitt zu einem Kreise wird, nemlich:

$$3.\quad \frac{AB}{AD}:\frac{CB}{CD}=\frac{A'B'}{A'D'}:\frac{C'B'}{C'D'},$$

eine Gleichung, welche der Form nach dieselbe ist, wenn jene Puncte zweien projectivischen Geraden angehören.

Wir gebrauchen daher im Allgemeinen die Form 2., wenn A und A', B und B', C und C', D und D' entsprechende Puncte zweier Systeme M und M' sind, es mögen dabei M und M' projectivische Gerade oder projectivische Vielecke eines Kegelschnitts vorstellen.

In der Form (A, C, B, D) sind die beiden ersten und die beiden letzten Elemente einander zugeordnet, A und C, B und D, und das erste Element A bildet mit den beiden letzten B und D das erste, C mit B und D das zweite einfache Verhältniss des Doppelverhältnisses. Liegen z. B. die Puncte in einer Geraden, so ist:

$$(A, C, B, D)=\frac{AB}{AD}:\frac{CB}{CD},$$

$$(D, A, B, C)=\frac{DB}{DC}:\frac{AB}{AC},$$

und so fort.

5. Sind in Fig. 19. irgend zwei projectivische Vielecke M und M eines Kegelschnitts gegeben, sind A und A', B und B', ... E und E', ...

entsprechende Puncte derselben und als projectivische Strahlenbüschel A auf M' und A' auf M bezogen, so erzeugen A und A' eine Gerade N, die insbesondere den Kegelchnitt nicht schneidet. Es sei P der Durchschnitt von AE' und $A'E$ in N; liegt also P ausserhalb des Kegelschnitts, und zieht man die Sehnen BF' und $B'F$ desselben durch P, so ist nach §. 3.

$$(F, E, A, B) = (B', A', E', F')$$

und hieraus folgt, nur anders geschrieben, die Gleichung

$$(F, E, A, B) = (F', E', A', B').$$

Es sind also F und F' entsprechende Puncte der projectivischen Vielecke M und M', und bezieht man jetzt B auf M' und B' auf M, so erzeugen B und B' eine Gerade, die mit der obigen Geraden N dieselbe ist, da sie mit ihr die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AE' und $A'E$ (den Punct P) gemein hat. Man sehe hier §. 1., wo der Beweis ganz ebenso geführt ist.

Sind demnach zwei projectivische Vielecke eines Kegelschnitts gegeben, so erzeugen jede zwei entsprechende Puncte derselben, als projectivische Strahlenbüschel auf die nicht zugehörigen Systeme bezogen, dieselbe Gerade.

Die Vielecke M und M' sind aber durch drei entsprechende Punctenpaare A und A', B und B', C und C' gegeben, und es liegen folglich die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$, in einer Geraden.

In jedem Sechsecke im Kegelschnitte liegen daher die drei Durchschnitte der gegenüberliegenden Seitenpaare in einer Geraden.

6. Die Beziehungen des vorigen §. gelten offenbar allgemein, es mögen die Vielecke M und M' schief, oder sie mögen perspectivisch liegen. Bei der perspectivischen Lage werden nun auch immer die Geraden AA', BB', CC',... durch einen Punct S gehen. und die Gerade N wird den Kegelschnitt gar nicht schneiden, wenn die doppelten Puncte nicht vorhanden sind. Der Punct S heisst der *Pol* der Geraden N, und N die *Polare* des Punctes P in Bezug auf den Kegelschnitt.

Sind A und A', B und B', C und C' entsprechende Puncte zweier Systeme M und M', so gebrauchen wir die Bezeichnung:

$$\frac{A,\ B,\ C}{A',\ B',\ C,},$$

wo die Puncte des einen Systems M über, die Puncte des Systems M' unter dem Horizontalstriche, und die entsprechenden Puncte unter einander stehen.

Dabei liegen die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$ in einer Geraden N. Sind M und M' projectivische Vielecke eines Kegelschnitts, und decken sich z. B. die Puncte B und C', so geht die Sehne BC' des Kegelschnitts in eine Tangente desselben über und es folgt, dass

Bei jedem, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecke die Durchschnitte irgend zweier Seitenpaare, so wie der Durchschnitt der jedesmaligen fünften Seite mit der Tangente durch die gegenüberliegende Ecke, in einer Geraden liegen.

Decken sich hingegen die Puncte B und C', B' und C, so folgt, dass

Bei jedem, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecke die Durchschnittspuncte der gegenüberstehenden Seiten, so wie der Durchschnitt der Tangenten in zwei gegenüberstehenden Ecken in einer Geraden liegen.

Fallen endlich die Puncte A und B', A' und C, B und C' zusammen, so zeigt sich, dass

Bei jedem, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke die Durchschnitte der Seiten mit den Tangenten durch die gegenüberliegenden Ecken in einer Geraden liegen.

Aus denselben Gründen, wie sie hier zum Beweise der obigen Sätze angeführt wurden, folgt auch, dass

Wenn sich die Sehnen eines Kegelschnitts in einem Puncte schneiden, so schneiden sich die Tangenten durch die Endpuncte jeder Sehne in Puncten einer Geraden, der Polaren jenes Punctes.

7. Sind in einem Systeme M drei Puncte A, B, C und in einem zweiten Systeme M' drei Puncte A', B', C' gegeben, und wird über das Entsprechen der Puncte weiter keine Bestimmung gemacht, so bilden sich folgende sechs Schemata in dieser Hinsicht:

$$1.\ \frac{A,\ B,\ C}{A',\ B',\ C'},\qquad 2.\ \frac{A,\ C,\ B}{A',\ B',\ C'},\qquad 3.\ \frac{B,\ A,\ C}{A',\ B',\ C'},$$

$$4.\ \frac{B,\ C,\ A}{A',\ B',\ C'},\qquad 5.\ \frac{C,\ A,\ B}{A',\ B',\ C'},\qquad 6.\ \frac{C,\ B,\ A}{A',\ B',\ C'};$$

wo z. B. im zweiten A und A', C und B', B und C' entsprechende Puncte und die drei Durchschnitte p von AB' und $A'C$, AC' und $A'B$, CC' und $B'B$ in einer Geraden N liegen. Wir erhalten also sechs Geraden N und 18 solcher Puncte p.

Werden in dem ersten Schema die Geraden AB', $A'C$, BC', und ebenso die Geraden $A'B$, AC' und $B'C$ bis zu ihren Durchschnitten verlängert,

so erhält man zwei Dreiecke, in welchen sich die Seiten paarweise in Puncten einer Geraden schneiden: folglich gehen die Verbindungslinien der Ecken durch einen Punct. Diese Verbindungslinien der Ecken sind aber die Geraden 6, 3 und 2, welche durch einen Punct q gehen; und ebenso begegnen sich auch die Geraden 1, 4 und 5 in einem Puncte q.

Diese Beziehungen, die für zwei Gerade M und M' schon in IV. bewiesen wurden, sind auch gültig für zwei Systeme von drei Puncten in einem Kegelschnitte. Sind nun in einem Kegelschnitte sechs Puncte A, B, C, A', B', C' gegeben, so kann man beliebige drei derselben zu einem Systeme M und die andern drei zu einem zweiten Systeme M' nehmen, und erhält auf diese Weise zehn verschiedene Annahmen, auf welche die obigen Betrachtungen anwendbar sind. Es ergeben sich auf diese Weise 60 dem Kegelschnitte eingeschriebene Sechsecke, 60 Gerade N, 20 Puncte q, und es würde 180 Puncte p geben, wenn nicht stets vier Gerade N durch einen dieser Puncte gingen; weshalb es nur 48 Puncte p giebt.

Sechs Puncte eines Kegelschnitts bestimmen demnach 60 *demselben eingeschriebene einfache Sechsecke; in jedem derselben liegen die drei Durchschnitte* p *der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden* N, *und es giebt* 45 *Puncte* p *und* 60 *Gerade* N. *Von den* 60 *Geraden* N *gehen stets vier durch einen Punct* p, *und erstere können vier mal zu* 15 *verbunden werden; welche* 15 *Gerade* N *stets die* 45 *Puncte* p *enthalten. Die* 60 *Geraden* N *gehen aber auch zu dreien durch einen Punct* q, *und es giebt* 20 *Puncte* q.

Man sehe hier den Anhang No. 54. links. Dort ist noch die Behauptung:

Von den 20 *Puncten* q *liegen* 15 *mal vier in einer Geraden* g, *so dass jeder Punct* q *in einer Geraden* g *liegt*,

aufgestellt, die wir jetzt beweisen wollen.

Sind in Fig. 20. in einer Geraden die vier Puncte a, b, m und n, und in einer zweiten Geraden die vier Puncte a', b', m' und n', gegeben, so liegen die Durchschnitte

α von aa' und bb',
α' von am' und bn',
α'' von $a'm$ und nb',
α''' von mm' und nn'

in einer Geraden g.

Sind dann β und β' die Durchschnitte von am' und bb', mm' und nb', so haben wir zwei Dreiecke $a\beta\alpha$ und $m\beta'\alpha''$. deren Seiten sich paarweise

in den Puncten m', b', a' einer Geraden schneiden, folglich gehen die Geraden am, $\beta\beta'$ und $\alpha\alpha''$ durch einen Punct z; durch denselben Punct z gehen aber auch aus demselben Grunde die Geraden nb, $\beta\beta'$ und $\alpha'\alpha'''$, als Verbindungslinien der Ecken beider Dreiecke $b\beta\alpha'$ und $n\beta'\alpha'''$. In den beiden Dreiecken $\alpha\beta\alpha'$ und $\alpha''\beta'\alpha'''$ werden sich folglich auch $\alpha\alpha'$ und $\alpha''\alpha'''$ in einem Puncte t von $a'b'$ begegnen, und in beiden Dreiecken $\alpha\alpha'\varphi$ und $\alpha''\alpha'''\varphi'$ die Verbindungslinien $\alpha\alpha''$, $\alpha'\alpha'''$, $\varphi\varphi'$ in z sich schneiden. Es sind hier stets die beiden Sätze S. 79. III. angewendet. In Bezug auf die Strahlen $z\beta$ und $z\varphi$ sind nun nothwendig zu za die Strahlen $z\alpha$, $z\alpha'$, $z\alpha''$ und $z\alpha'''$ zugeordnete harmonische Strahlen und müssen folglich in einen Strahl zusammenfallen, d. h. es liegen die Puncte α, α', α'', und α''' in einer Geraden g (S. 75. II.)

Kehren wir jetzt zu dem Sechsecke im Kegelschnitte zurück. Es schneiden sich in dem einen Punct p, dem Durchschnitte von AC' und $A'C$, die vier Geraden N:

$$\frac{A,\ C,\ B}{A',\ C',\ B'},\qquad \frac{A,\ C,\ B'}{A',\ C',\ B},\qquad \frac{A,\ A',\ B}{C,\ C',\ B'},\qquad \frac{A,\ A',\ B'}{C,\ C',\ B};$$

und wenn wir in diesen Sechsecken die geraden und die ungeraden Seiten bis zu ihren Durchschnitten verlängern, so erhalten wir vier Paar Dreiecke, welche vier Puncte q bestimmen. Wird die Gerade AC der Reihe nach von den Geraden $A'B$, $B'C$, $B'A'$, BC in den Puncten a, b, n, m und die Gerade $A'C$ der Reihe nach von AB', BC', BA, $B'C'$ in a', b', n', m' geschnitten, so sind die Durchschnitte von aa' und bb', am' und bn', ma' und nb', mm' und nn' die vier Puncte q, und diese liegen, wie oben gezeigt wurde, in einer Geraden g. Drei der Puncte p, die in einer Geraden N liegen, bestimmen drei Geraden g, welche sich in einem Puncte q schneiden: es giebt also drei Systeme von fünf Geraden, welche die 20 Puncte q enthalten.

8. Wir wollen jetzt noch Einiges in Bezug auf die Aufgaben im Anfange No. 55. und von No. 57. erwähnen.

Wenn von dem Sechsecke im Kegelschnitte fünf Puncte fest bleiben und der sechste den Kegelschnitt durchläuft, so drehen sich die 60 *Geraden* N *um* 15 *feste Puncte* p; *die* 20 *Puncte* q *beschreiben* 20 *Kegelschnitte, und die* 15 *Geraden* g *drehen sich um* 15 *neue Puncte.*

In jeder Geraden N ist ein Punct p von dem als veränderlich gedachten Puncte B unabhängig, um den sich die Gerade N bei der Bewegung von

B dreht, und da durch ihn vier Geraden N gehen, so ist 15 die Zahl der festen Puncte p.

In Figur 21., welche dem vorigen §. zugehört, drehen sich die Seiten Ba und Bb' des Dreiecks aBb' um die Puncte A' und C', während B den Kegelschnitt durchläuft: folglich wird sich (S. 172. II.) die Seite ab' als Tangente eines Kegelschnitts bewegen, der auch die Geraden AC' und $A'C$ berührt. Von dem Dreiecke $\alpha ab'$ drehen sich die Seiten $a\alpha$ und ab' um die festen Puncte a' und b, und es beschreibt folglich α einen Kegelschnitt, der die Puncte b und a' enthält. Dieser Kegelschnitt könnte inbesondere in eine Gerade übergehen, wenn bei irgend einer Lage von B die Puncte b und b', a und a' zu entsprechenden Puncte der projectivischen Geraden würden; was nicht der Fall ist. Der Punct α ist aber einer der Puncte q. Durch ähnliche Betrachtungen zeigt sich, dass sich in dem Dreiecke $\beta\alpha\alpha'$ in Fig. 20. die Ecken in drei Kegelschnitten bewegen, welche sich im Puncte b schneiden, und dass von diesem Dreiecke zwei Seiten um die festen Puncte b und m' sich drehen: folglich wird sich auch die dritte Seits $\alpha\alpha'$ oder g um einen festen Punct drehen.

Bei der Bewegung von B in dem gegebenen Kegelschnitte kann B eine solche Lage annehmen, dass die Gerade BB' durch den Durchschnitt von AC' und $A'C$ geht. Bezeichnet man diesen Durchschnitt durch p', so ist leicht zu sehen, dass sich in p' jetzt 12 Gerade N schneiden, der Punct p' also für drei Puncte p gilt. In p' schneiden sich z. B. die drei Geraden N, nemlich:

$$\frac{A,\ B,\ C}{A',\ B',\ C'},\qquad \frac{B,\ C,\ A}{A',\ B',\ C'},\qquad \frac{C,\ A,\ B}{A',\ B',\ C'},$$

die nach §. 6. auch durch einen Punct q gehen, und es liegen folglich in p' vier Puncte q. Die Puncte α, α', α'' und α''' in Figur 20, liegen jetzt in der Polare von p'; diese Gerade g dreht sich also bei der Bewegung von B um einen Punct, der in der Polare p' sich befindet.

9. Wir wollen schliesslich noch der im Anhange unter No. 3. und No. 5. stehenden und hierher gehörenden Sätze kurz erwähnen. Der erste ist schon ausführlich in dem gegenwärtigen Journale, im 19. Bande, von Herrn *Bauer* behandelt.

Sind in zwei projectivischen Systemen M und M' (Geraden oder Vielecken eines Kegelschnitts) vier entsprechende Punctenpaare A und A', B und B', C und C', D und D' gegeben, so ist offenbar:

$$(A, C, B, D) = (B, D, A, C) = (D, B, C, A) = (C, A, D, B) = (A', C', B', D')$$

und wir schreiben jetzt

$$1.\ \frac{A,\ C,\ B,\ D}{A',\ C',\ B',\ D'},\quad 2.\ \frac{B,\ D,\ A,\ C}{A',\ C',\ B',\ D'},\quad 3.\ \frac{D,\ B,\ C,\ A}{A',\ C',\ B',\ D'},\quad 4.\ \frac{C,\ A,\ D,\ B}{A',\ C',\ B',\ D'}.$$

Diese vier Formen bezeichnen vier Geraden N', und in jeder derselben liegen sechs Puncte p, die Durchschnitte von Geradenpaaren, die die Puncte von M und M' verbinden.

Zieht man von jedem der vier Puncte von M nach den Puncten von M' Strahlen, so erhält man vier Systeme von vier Strahlen, welche Systeme sich paarweise in zwölf Puncten p schneiden: folglich giebt es sieben der Puncte p, von welchen 24 auf obigen vier Geraden N' liegen. Die vier Puncte jeder der Systeme M und M' können auf vier verschiedene Arten zu dreien zusammengefasst werden, und jede solche Verbindung von M mit einer von M' giebt nach §. 7. 6 Geraden N, 18 Puncte p und 2 Puncte q. Diese Zahlen von N, p und q, mit 16 multiplicirt, würden die ganze Anzahl der N, p und q geben; es sind aber nur 72 Puncte p vorhanden, folglich geben durch jeden Punct p vier Geraden N; unter jeder der obigen 6 Geraden N ist eine Gerade N' enthalten; es giebt also nur $5.16+4 = 84$ Geraden N. Es sind also im Ganzen 72 Puncte p, 84 Geraden N, und 32 Puncte q vorhanden, und von letztern liegen 16 zu 4 in den vier Geraden N'.

Sind insbesondere A und C zu B und D, und folglich auch A' und C' zu B' und D' zugeordnete harmonische Puncte, so erhält man noch vier neue Geraden N', nemlich:

$$5.\ \frac{A,\ C,\ D,\ B}{A',\ C',\ B',\ D'},\quad 6.\ \frac{C,\ A,\ B,\ D}{A',\ C',\ B',\ D'},\quad 7.\ \frac{B,\ D,\ C,\ A}{A',\ C',\ B',\ D'},\quad 8.\ \frac{D,\ B,\ A,\ C}{A',\ C',\ B',\ D'}.$$

Vergleicht man diese vier Formen mit den ersten dieses §., so folgt, dass auf diesen Geraden N' noch 16 neue Puncte p liegen, die 8 Geraden N' also 40 Puncte p enthalten. Es sind jetzt im Ganzen, mit Einschluss der 8 Geraden N', nur 72 Geraden N vorhanden, und die 32 Puncte q liegen zu vier auf den acht Geraden N'.

Es schneiden sich jetzt der Reihe nach die Geraden N', nemlich 2 und 7,

3 und 8, 2 und 8, 3 und 7 in einem Puncte. Die vier Geraden AD', $B'C$, $A'D$, BC' bilden ein vollständiges Vierseit, dessen drei Diagonalen die Geraden 1, 2 und 4 sind; ebenso bilden die vier Geraden CD', AB', DC', $A'B$ ein vollständiges Vierseit mit den Diagonalen 3, 1 und 4. Die Durchschnitte von AD' und DC', BC' und AB', $B'C$ und BA' liegen in den Geraden 6, und diese Seitenpaare bilden zwei Dreiecke, in denen sich folglich die Verbindungslinien der Ecken, die Geraden 8, 4 und 1, in einem Puncte schneiden. Aus denselben Gründen gehen die Geraden 7, 4 und 1, durch einen Punct, und es schneiden sich folglich die vier Geraden 7, 8, 1 und 4, und ebenso die Geraden 2, 3, 5 und 6, in einem Puncte.

Diese Betrachtungen enthalten eine grosse Zahl von Sätzen, da man den gegebenen acht Puncten unter den obigen Bedingungen verschiedene Lagen geben kann. Dies hier weiter durchzuführen mögte nicht geeignet erscheinen.

VI.

Construction von Curven mit Hülfe gegebener Kegelschnitte.

1. Werden in einem gegebenen Kegelschnitte μ zwei feste Puncte A und A' angenommen, drehen sich die Sehnen AB' und $A'B$ von μ um die festen Puncte A und A', während ihr Durchschnitt x eine Gerade N beschreibt, so wird der Durchschnitt y der Sehnen AB und $A'B'$ offenbar einen Kegelschnitt π beschreiben d. h.

Sind zwei projectivische Vielecke M *und* M' *eines Kegelschnitts* μ *gegeben,* A *und* A', B *und* B', C *und* C',..... *entsprechende Puncte derselben, und bezieht man zwei entsprechende Puncte* A *und* A' *als projectivische Strahlenbüschel auf ihre zugehörigen Systeme* (A *auf* M *und* A' *auf* M'), *so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen dieser Strahlenbüschel in einem Kegelschnitte.*

Der obige Kegelschnitt π geht offenbar:

a. Durch die Puncte A und A';

b. Durch die reellen oder imaginären Durchschnitte von N mit dem Kegelschnitt μ;

c. Durch den Pol von N in Bezug auf μ, wie es die Construction zeigt;

d. Durch den Pol Q von AA' in Bezug auf μ.

Man kann nun offenbar zwei verschiedene Annahmen machen, die zu manchen Beziehungen führen.

a. Man nehme im Kegelschnitte μ die beiden projectivischen Vielecke M und M' als gegeben an, wodurch auch die Gerade N, und mit ihr der Pol R von N, in Bezug auf μ bestimmt sind; alsdann erzeugen A auf M und A' auf M' bezogen einen Kegelschnitt π, der durch drei feste Puncte geht: durch die beiden Durchschnitte von N mit μ und durch den Punct R; und diese drei Puncte bleiben dieselben, wenn man für A und A' irgend ein anderes entsprechendes Punctenpaar von M und M' nimmt. Wird für N insbesondere die unendlich entfernte Gerade genommen, so ist R der Mittelpunct von μ, und jede der Curven π ist mit μ bekanntlich ähnlich und ähnlich liegend.

b. Oder man nehme im Kegelschnitte μ die beiden Puncte A und A', also auch den Pol von AA' in Bezug auf μ fest an, und ändere die Lage von N, und somit auch die Vielecke M und M'. Jeder Lage von N entspricht nach der obigen Construction ein Kegelschnitt π, und alle diese Curven π gehen durch die drei festen Puncte A, A' und Q. Der unendlich entfernten Geraden N' entspricht ebenfalls ein Kegelschnitt π', der μ ähnlich ist und auch ähnlich liegt, und es sind folglich μ und π' gleichzeitig Kreise, Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln. Wir werden nur den hier in *b.* angezeigten Fall ausführen.

Jedem Puncte x einer Geraden N entspricht nach der obigen Construction ein Punct y der entsprechenden Curve π, und umgekehrt dem Puncte y ein Punct x. Schneiden sich daher mehrere Geraden N in einem Puncte x, so werden die entsprechenden Curven π einen bestimmten vierten Punct y gemein haben. Von diesem Puncte x sind im Allgemeinen zwei Tangenten von π', der der unendlich entfernten Geraden N' entsprechende Curve, möglich, und jeder solchen Tangente entspricht offenbar eine Parabel: da aber im Allgemeinen jedem Puncte von π' ein Punct von N' entspricht, so folgt, dass

Alle Kegelschnitte, die sich in denselben vier Puncten A, A', Q *und* y *schneiden,*

a. Hyperbeln, Ellipsen und zwei Parabeln sind, wenn der Punct x *ausserhalb von* π' *liegt;*

β. Dass sie Hyperbeln und eine Parabel sind, wenn x *ein Punct der Curve* π' *ist, und*

γ. Dass sie lauter Hyperbeln sind, wenn sich x *innerhalb des Kegelschnitts* π' *befindet.*

Denn es hängt die Art des Kegelschnitts π offenbar davon ab, ob die durch den Punct x gehende Gerade N den Kegelschnitt π' schneiden müsse, oder nicht.

Diese Betrachtungen können unmittelbar angewendet werden, um Sätze über die gegenseitige Lage von Geraden auf die Lagen von Kegelschnitten oder umgekehrt zu übertragen; wie dies z. B. mit dem Satze im Anhange No. 56. rechts geschehen kann.

2. Die drei festen Puncte A, A' und Q bei der Construction im vorigen §. in *b.* werden *Hauptpuncte* (Cardinalpuncte) genannt. Bewegt sich ein Punct x in einer Geraden N, so beschreibt sein entsprechender Punct y einen Kegelschnitt π, der durch die drei Hauptpuncte geht. Der Punct y wird aber im Allgemeinen eine Curve $2n$ter Ordnung (wo n eine positive ganze Zahl ist) beschreiben, wenn sich x in einer Curve $n$ter Ordnung bewegt. Denn irgend einer jener Kegelschnitte π schneidet die Curve $n$ter Ordnung im Allgemeinen in $2n$ Puncten x, deren entsprechende Puncte y einmal in der Geraden N liegen, die dem Kegelschnitte π entspricht, und dann auch in der Curve sich befinden, die der $n$ter Ordnung entspricht; und diese wird also von jeder Geraden in $2n$ Puncten geschnitten.

Jeder Curve φ *von der* n*ten Ordnung entspricht im Allgemeinen eine Curve* ψ *von der* 2n*ten Ordnung.*

In einer durch A gehenden Geraden, welche die Curve φ schneidet, liegen im Allgemeinen und höchstens n Puncte x, und ziehen wir nach ihnen von A' aus Geraden, so sehen wir bei der Construction der Puncte y, dass nur n Puncte y in der durch A' gehenden Geraden $A'B$ liegen können. Jede Gerade durch A', und folglich auch durch A, schneidet die Curve ψ höchstens in n Puncten, und man nennt deshalb die Puncte A und A' $n$fache Puncte. Es ist aber auch Q ein $n$facher Punct: denn da irgend eine Gerade N der Curve φ nur in n Puncten begegnet, so wird auch ihr entsprechender Kegelschnitt π die Curve ψ nur in n Puncten schneiden; es müssen sich aber π und ψ im Allgemeinen in $4n$ Puncten treffen; von diesen liegen $2n$ Puncte in den Puncten A und A', n Puncte in jenen Durchschnitten von π und ψ, und folglich n Puncte im Puncte Q.

Die drei Hauptpuncte sind n*fache Puncte der Curve* ψ *von der* $2n$*ten Ordnung.*

3. Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, dass φ ein Kegelschnitt sei; alsdann wird ψ im Allgemeinen zu einer Curve vierter Ordnung, und die drei Hauptpuncte werden zu Doppel-Puncten werden.

Jeder Tangente von φ entspricht offenbar ein Kegelschnitt π, der die Curve ψ berührt, und es folgt also, dass

Allen Geraden N, *die sich als Tangenten eines Kegelschnitts* φ *fortbewegen, Kegelschnitte* π *entsprechen, die von einer Curve* ψ *vierter Ordnung umhüllt (berührt) werden.*

Es sei π' der Kegelschnitt, welcher der unendlich entfernten Geraden N' entspricht, so wissen wir, dass jeder Tangente von π' eine Parabel entspricht; die beiden Kegelschnitte φ und π' haben aber im Allgemeinen und höchstens vier gemeinschaftliche Tangenten: folglich sind unter jenen Kegelschnitten π, die von der Curve ψ vierter Ordnung umhüllt werden, im Allgemeinen nur vier Parabeln. Die andern Kegelschnitte π sind demnach entweder Hyperbeln oder Ellipsen. Wenn z. B. der Kegelschnitt π' ganz innerhalb des Kegelschnitts φ liegt, so kann keine Tangente von φ die π' schneiden, und es sind alle Curven π Ellipsen; sie sind hingegen alle Hyperbeln, wenn φ ganz innerhalb von π' liegt.

Durch die drei Puncte A, A' und Q sind bekanntlich im Allgemeinen vier Kegelschnitte möglich, welche mit φ einen doppelten Contact haben, und die Construction zeigt, dass diesen vier Kegelschnitten vier Doppel-Tangenten der Curve ψ vierter Ordnung entsprechen. Denn jeder Tangente von φ entspricht ein Kegelschnitt, welcher ψ berührt, und jeder Tangente von ψ entspricht ein Kegelschnitt, der φ berührt.

Jeden zwei parallelen Tangenten N von φ entsprechen zwei Kegelschnitte π, die sich in einem Puncte von π' schneiden, und zwar in dem Puncte, welcher der Richtung jener beiden Tangenten entspricht. Diese beiden Kegelschnitte π werden von der Curve ψ in zwei Puncten berührt, und legt man durch letztere Puncte und die drei Hauptpuncte einen Kegelschnitt, so geht derselbe durch einen festen Punct, den entsprechenden Punct des Mittelpuncts der Curve φ, weil obiger Kegelschnitt einem Durchmesser von φ entspricht, welcher der Richtung jener beiden Tangenten N zugeordnet ist.

4. Es soll endlich hier noch der Satz im Anhange No. 41. links bewiesen werden, und wir wollen der Einfachheit wegen nur drei Kegelschnitte annehmen.

Es seien in dem gegebenen Kegelschnitte μ Fig. 22., wie hier immer, die Puncte A, A' und Q fest; stellen wir uns zu den drei Geraden qq', qq'' und $q'q''$ die drei Kegelschnitte π, π' und π'' construirt vor, welche die drei festen Puncte A, A' und Q enthalten, und schneiden sich ferner π und π' in p, π und π'' in p', π' und π'' in p'', so sind vermöge der Construction p und q, p' und q', p'' und q'' entsprechende Puncte. Die Puncte a, a' und a'' sind die Durchschnitte von QA', die Puncte b, b' und b'' die Durchschnitte von QA, und die Puncte c, c' und c'' die von AA' mit den Seiten des Dreiecks $qq'q''$. Man kann nun in $q'q''$ und qq'' die Puncte a und a', b und b', c und c' zu entsprechenden Puncten zweier projectivischen Geraden nehmen und zu irgend einem Puncte d von $q'q''$ den entsprechenden Punct d' in qq'' finden, und es ist alsdann

$$(a,\ c,\ b,\ d) = (a',\ c',\ b',\ d').$$

Diese beiden projectivischen Geraden erzeugen einen Kegelschnitt α, welchem die beiden Dreiecke QAA' und $q''dd'$ umschrieben sind; folglich liegen nach S. 173 die Ecken dieser Dreiecke in einem zweiten Kegelschnitte α'. Ferner kann man a und a'', b und b'', c und c'' zu entsprechenden Puncten der projectivischen Geraden $q'q''$ und qq' nehmen und zu jenem Puncte d in $q'q''$ den entsprechenden Punct d'' in qq' finden, so dass

$$(a,\ c,\ b,\ d) = (a'',\ c'',\ b'',\ d''),$$

und es sind hier die beiden Dreiecke QAA' und $q'dd''$ einem Kegelschnitte β umschrieben, folglich auch einem Kegelschnitte β' eingeschrieben. Aus den beiden Gleichungen folgt aber

$$(a',\ c',\ b',\ d') = (a'',\ c'',\ b'',\ d''),$$

d. h. die beiden Dreiecke QAA' und $qd'd''$ sind einem Kegelschnitte γ umschrieben, also auch einem Kegelschnitte γ' eingeschrieben. Es ist zu bemerken, dass die Wahl des ersten Punctes d in $q'q''$ ganz beliebig ist, und dass jedem Puncte d bestimmte Puncte d' und d'' entsprechen.

Da die drei Kegelschnitte α', β' und γ' durch die drei Puncte Q, A und A' gehen, so entsprechen ihnen nach unserer Construction der Reihe nach drei Geraden N, N' und N''; und sind δ, δ' und δ'' die entsprechenden Puncte von d, d' und d'', so dass also δ in π'', δ' in π', δ'' in π liegt, so enthalten offenbar

Die Geraden N die Puncte p'', δ'' und δ,
Die Geraden N' die Puncte p', δ' und δ,
Die Geraden N'' die Puncte p, δ' und δ''.



Sind mehr als drei Kegelschnitte gegeben, so wird der Beweis fortlaufend ebenso geführt.

Werden also einem gegebenen Dreiecke QAA′ *beliebige* n *Kegelschnitte umschrieben, und man berücksichtigt die* n *Puncte* p, p′, p″,....., *in welchen je zwei, nach der Reihe unmittelbar auf einander folgende Kegelschnitte sich schneiden, so lassen sich unzählige* n-*Ecke so beschreiben, dass ihre Seiten der Reihe nach durch jene Puncte gehen, und dass ihre Ecken der Ordnung nach in jenen Kegelschnitten liegen.*

5. Es seien in Fig. 23., wieder in einem Kegelschnitte μ, die beiden festen Puncte A und A' gegeben, um die sich die Sehnen von AC' und $A'C$ von μ drehen, während ihr Durchschnitt B' eine Gerade N beschreibt, so wird bekanntlich der Durchschnitt y von AC und $A'C'$ einen Kegelschnitt π durchlaufen, der die Puncte A und A' und die beiden Pole Q und P von AA' und N in Bezug auf μ enthält. Es ist nun By oder b' die Polare von B', und da sich B' in der Geraden N bewegt, so dreht sich bekanntlich b' um den Pol P von N und es liegen nach bekannten Sätzen über das einem Kegelschnitte eingeschriebene Viereck, die Puncte Q, y und B' stets in einem Strahle b. Die beiden projectivischen Strahlenbüschel P und Q erzeugen den Kegelschnitt π, und jede zwei in einem Puncte y von π sich schneidenden Strahlen b und b' sind entsprechende Strahlen von Q und P. Es ist nun unmittelbar ersichtlich, dass auch N und AA' projectivische Gerade, und zwar, dass B' und B entsprechende Puncte derselben sind, wenn sich stets b und N in B', b' und AA' in B schneiden. Die Gerade BB' wird also bei ihrer Fortbewegung einen Kegelschnitt α umhüllen, der offenbar auch die Geraden AA', N, QA und QA' zu Tangenten hat.

Ist insbesondere N die unendlich entfernte Gerade, also P der Mittelpunct des Kegelschnittes μ, so wird α zu einer Parabel und die BB' ist stets dem Strahle b parallel; es sind aber b und B entsprechende Elemente der projectivischen Gebilde Q und AA':

Sind also in einer Ebene zwei projectivische Gebilde, eine Gerade AA′ *und ein Strahlenbüschel* Q, *in beliebig schiefer Lage gegeben, und legt man durch jeden Punct* B *der Geraden* AA′ *einen Strahl, der dem dem Puncte* B *entsprechenden Strahle* b *von* Q *parallel ist, so umhüllen alle diese Strahlen eine Parabel, die auch* AA′ *zur Tangente hat.*

Man sehe hier den Anhang No. 24. Ist wieder N die unendlich entfernte Gerade und μ ein Kreis, so schneiden sich die Strahlen b und b'

rechtwinklig, und da die BB' dem Strahle b parallel ist, wird auch die BB' auf b' rechtwinklig sein.

Liegen zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A A' *und ein Strahlenbüschel* P, *perspectivisch, und legt man durch jeden Punct* B *der Geraden* A A' *einen Strahl, der auf dem dem* B *entsprechenden Strahle* b' *von* P *senkrecht steht, so umhüllen alle diese Strahlen ein Parabel, die auch* A A' *berührt.*

Es werde der jedesmalige Durchschnitt von $A'C'$ mit N durch B'' bezeichnet, so wird auch BB'' einen Kegelschnitt umhüllen, der ebenfalls eine Parabel werden kann. Wir wollen dies hier nicht weiter durchführen. Es können endlich, um eine Parabel zu erzeugen, z. B. auch QA, QA' oder AA' in unendlicher Entfernung liegen.

VII.

Das Entsprechen von Puncten und Kegelschnitten.

1. Sind in einem Kegelschnitte μ Fig. 24. die beiden festen Puncte A und A' gegeben, ist Q der Pol der Geraden AA' in Bezug auf μ, und dreht sich um irgend einen Punct P eine Gerade BB', welche die Tangenten QA und QA' von μ in B und B' schneidet; zieht man ferner von B und B' an μ Tangenten, welche QA' und QA in B''' und B'' schneiden, und zieht die Gerade $B''B'''$: so wird dieselbe einen Kegelschnitt umhüllen, der offenbar auch die Geraden QA, QA' und AA' zu Tangenten hat. Es folgt dies unmittelbar aus den entstehenden projectivischen Geraden, denn es sind stets B und B', B und B''', B' und B'', und folglich auch B'' und B''' entsprechende Puncte projectivischer Geraden. Dieser Kegelschnitt hat ferner die Polare von P in Bezug auf μ, und die Tangenten von μ durch die Durchschnitte dieser Polaren von P mit μ zu seinen Tangenten. Letztere beiden Tangenten können auch imaginär werden, wenn P innerhalb der Curve μ liegt.

Zieht man also von zwei Puncten die Tangenten an einen gegebenen Kegelschnitt, so sind sie und die Polaren dieser beiden Puncte in Bezug auf diesen Kegelschnitt die Tangenten eines neuen Kegelschnittes α.

Jedem Puncte P entspricht ein Kegelschnitt α, und alle α haben dieselben drei Tangenten QA, QA' und AA'; allen Puncten P, die in einem Strahle BB' liegen, entsprechen Kegelschnitte, welche noch eine vierte Tangente $B''B'''$ gemein haben; jedem Strahle von P entspricht eine Tangente von α.

Dem Mittelpuncte P von μ entspricht offenbar eine Parabel, da seine Polare in Bezug auf μ, in unendlicher Entfernung liegend, eine Tangente derselben ist. Es ist leicht, diese Beziehungen weiter auszudehnen.

2. Wir wollen nun noch den Satz No. 41. rechts im Anhange beweisen.

Es seien in Fig. 25. drei Puncte P, P' und P'' gegeben, und in Bezug auf sie der Reihe nach dem vorigen §. gemäss die Kegelschnitte π, π' und π'' bestimmt; es sei p der entsprechende Strahl von PP', p' der entsprechende Strahl von $P'P''$ und p'' der entsprechende Strahl von PP'', so haben ausser den drei Tangenten QA, QA' und AA' noch π und π' die p, π' und π'' die p', und π und π'' die p'' zur gemeinschaftlichen vierten Tangente. Durch die Puncte Q, A, A', P und P' lässt sich stets ein Kegelschnitt legen, in Bezug auf welchen P und P' projectivische Strahlenbüschel sind, und es kann zu jedem Strahle d von P der entsprechende Strahl d' von P' gefunden werden; schneiden sich d und d' in q, so sind die beiden Dreiecke QAA' und $PP'q$ einem Kegelschnitte eingeschrieben, folglich nach S. 173. auch einem Kegelschnitte umschrieben, und letzterem entspricht offenbar ein Punct x, der in der Geraden p liegt. Denn die Kegelschnitte, welche den Dreiecken QAA' und $PP'q$ für verschiedene Lagen von q umschrieben sind, haben dieselbe vierte Tangente PP': folglich liegen ihre entsprechenden Puncte in einer Geraden, die hier die Gerade p ist; was die Construction sogleich zeigt. Eben so kann man durch die Puncte Q, A, A', P und P'' einen Kegelschnitt legen, in Bezug auf welchen P und P'' projectivische Strahlenbüschel sind und zu jenem Strahle d von P den entsprechenden Strahl d'' von P'' finden. Schneiden sich d und d'' in q'', so sind die Dreiecke QAA' und $PP''q''$ einem Kegelschnitte eingeschrieben, folglich auch einem Kegelschnitte umschrieben, welchem ein Punct y entspricht, der in der Geraden p'' liegt. Es ist nun sogleich ersichtlich, dass auch die Dreiecke QAA' und $P'P''q'$, wo q' der Durchschnitt der Strahlen d' und d'' ist, einem Kegelschnitte eingeschrieben sind, folglich auch einem andern umschrieben, welchem ein Punct z in p' entspricht. Die Puncte x, y und z bilden ein Dreieck, dessen Ecken in den Geraden p, p'' und p' liegen; die Seite xy desselben ist eine Tangente des Kegelschnitts π, xz eine Tangente von π', yz eine Tangente von π'': denn nach der Construction entsprechen z. B. den

beiden in dem Strahle d liegenden Puncten q und q'' zwei Kegelschnitte, welche die Gerade xy zur Tangente haben, und da in d auch der Punct P liegt, so ist auch xy eine Tangente von π. In der Figur sind nicht alle Linien gezogen und nicht alle Puncte bezeichnet, um sie nicht undeutlich zu machen. Man sehe hier No. VI. §. 4. Sind mehr als drei Kegelschnitte π, π' und π'' gegeben, so wird der Beweis ganz ebenso geführt.

Werden demnach einem gegebenen Dreiseit QAA′ *beliebige* n *Kegelschnitte eingeschrieben, und man legt an je zwei, der Reihe nach unmittelbar auf einander folgende Kegelschnitte eine vierte gemeinschaftliche Tangente* p, p′, p″......, *so lassen sich unzählige* n-*Ecke so beschreiben, dass ihre Ecken der Reihe nach in diesen Tangenten liegen und dass ihre Seiten der Ordnung nach jene Kegelschnitte berühren.*

(Der Schluss dieser Abhandlung folgt im nächsten Hefte.)

4.

Einige geometrische Aufgaben.

(Von dem Herrn Prof. *Lehmus* in Berlin.)

I.

Die Dreiecke zu finden, deren Seiten und Höhen sich in derselben Einheit durch rationale Zahlen ausdrücken lassen.

Bezeichnen A, B, C die Längen der drei Seiten, a, b, c die zugehörigen Höhen, so dass

1. $Aa = Bb = Cc$ ist, und betrachtet man den C gegenüberliegenden Winkel als einen der beiden spitzen Winkel der gesuchten Dreiecke, und die Projection von B auf A als Längen-Einheit, so hat man

A. wenn der B gegenüberliegende Winkel auch ein spitzer sein soll:

2. $\quad B^2 = 1^2 + a^2,$

3. $\quad C^2 = (A-1)^2 + a^2.$

Versteht man nun unter α und β willkührlich zu nehmende echte rationale Brüche und setzt

4. $\quad 1^2 + a^2 = (1 + \alpha a)^2$ und

5. $\quad (A-1)^2 + a^2 = [A - 1 + \beta a]^2$, so geben die bisherigen Gleichungen, die Werthe für die drei Seiten und die drei Höhen durch α und β ausgedrückt. Es entstehen, wenn

n den Ausdruck $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\cdot\frac{1-\beta^2}{\beta}$ bezeichnet, folgende Resultate:

$$A = 1 + n; \qquad B = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}; \qquad C = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\cdot\frac{1+\beta^2}{\beta};$$

$$a = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}; \qquad b = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}(1+n); \qquad c = \frac{2\beta}{1+\beta^2}(1+n).$$

Soll aber

B. der B gegenüberliegende Winkel ein stumpfer sein, so sind die Gleichungen

$$6. \qquad B^2 = 1 + a^2 = (1 + \alpha a)^2,$$
$$7. \qquad C^2 = (1 - A)^2 + a^2 = (1 = A + \beta a)^2$$

und die Formeln werden zu folgenden:

$$A = 1 - n; \qquad B = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}; \qquad C = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \cdot \frac{1+\beta^2}{\beta};$$
$$a = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}; \qquad b = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}(1-n); \qquad c = \frac{2\beta}{1+\beta^2}(1-n).$$

C. Ist der B gegenüberliegende Winkel ein rechter, so dass $C = a$, also $\beta = 1$ und $n = 0$ werden muss, so sind die Formeln folgende:

$$A = 1; \qquad B = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}; \qquad C = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2},$$
$$a = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}; \qquad b = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}; \qquad c = 1.$$

Werden endlich

D. gleichschenkliche Dreiecke über A verlangt, so muss, weil dann A als die doppelte Einheit erscheint, $\alpha = \beta$ genommen werden, und die Resultate sind

$$A = 2 \qquad B = C = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2},$$
$$a = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}; \qquad b = c = \frac{4\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Es werden diese Dreiecke spitzwinklig, wenn der für α zu setzende rationale echte Bruch grösser als $\sqrt{2} - 1$, stumpfwinklig, wenn er kleiner als $\sqrt{2} - 1$ ist.

In Zahlenfällen kann man die sechs Formeln mit ihrem kleinsten General-Nenner multipliciren und erhält dann in ganzen Zahlen ausgedrückte Werthe für die sechs Längen.

II.

Es ist ein Winkel ABC und in seiner Ebene ein Kreis zum Mittelpuncte B gegeben: man soll in seiner Peripherie die Puncte D finden, für welche AD und CD mit BD, also auch mit der Tangente in D gleiche Winkel

bilden. (Sind A und C Augen- und Lichtpunct und liegen beide ausserhalb der Peripherie, so bestimmt einer der Puncte D den Glanzstreifen, wenn der Kreis als Querschnitt eines Cylinders betrachtet wird.)

Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises, 2α den hohlen Winkel ABC, $\alpha + x$ den W. ABD, $\alpha - x$ den W. CBD; a die Länge BA: b die BC; ($a > b$ angenommen) und man stellt sich die Normalen aus A und C auf BD vor, so ergiebt sich aus zwei entstehenden ähnlichen Dreiecken folgende Bedingungs-Gleichung:

$$1.\quad \frac{a\cos(\alpha + x) - r}{a\sin(\alpha + x)} = \frac{b\cos(\alpha - x) - r}{b\sin(\alpha - x)}, \text{ oder}$$

$$2.\quad \left[\frac{2ab}{r}\sin x - (a - b)\sin\alpha\right]\cos x = (a + b)\cos\alpha\sin x$$

und es erhellet aus der letztern, dass für jeden ihr genügenden positiven Werth von $\sin x$ nur der spitze Winkel genommen werden kann, wenn $\frac{2ab}{r}\sin x - (a - b)\sin x$ positiv, und nur der stumpfe, wenn derselbe Ausdruck negativ ausfällt; für genügende negative Werthe von $\sin x$ aber ist nur der Winkel im vierten Quadranten zu nehmen.

Wird nun

$$3.\quad \frac{2ab}{r} = c, \qquad (a - b)\sin\alpha = d, \qquad (a + b)\cos\alpha = h \text{ gesetzt},$$

so entspringt aus 2.

$$4.\quad \sin^4 x - \frac{2d}{c}\sin^3 x - \frac{c^2 - d^2 - h^2}{c^2}\sin^2 x + \frac{2d}{c}\sin x - \frac{d^2}{c^2} = 0$$

und hieraus,

5. $2c\sin x - d$ durch z bezeichnet:

$$6.\quad z^4 - 2[2c^2 + d^2 - 2h^2]z^2 + 8(c^2 + h^2)dz - [4c^2 - d^2 - 4h^2]d^2 = 0.$$

Bestimmt man nun A, B und C so, dass diese Gleichung identisch wird mit der Gleichung

7. $[z + Az + B][z^2 - Az + C]\ 0$, so findet sich

8. $c^2 + h^2 = \delta^2$ und, $c^2 - h^2 = D^2$ gesetzt:

$$9.\quad B = \frac{A^2}{2} - (2D^2 + d^2) - \frac{4S^2d}{A};$$

$$10.\quad C = \frac{A^2}{2} - (2D^2 + d^2) + \frac{4S^2d}{A} \text{ und}$$

zur Bestimmung von A die Gleichung:

$$11.\quad A^6 - 4[2D^2 + d^2]A^4 + 16D^2(D^2 + 2d^2)A^2 - 64S^4d = 0,$$

welche reducirt, also

12. $A^2 - \frac{4}{3}(2D^2 + d^2)$ durch y ausgedrückt, in

13 $y^3 - \frac{16}{3}(D^2 - d^2)^2 \cdot y - \frac{128}{27}\left[54(chd)^2 - (D^2 - d^2)^3\right] - 0$

übergeht.

Letztere Gleichung giebt nur einen reellen Werth für y, wenn

14. $27(chd)^2 \geqq (D^2 - d^2)^3$, aber drei solche Werthe,

wenn

15. $27(chd)^2 < (D^2 - d^2)^3$ ist, und dann ergiebt sich, welchen derselben man auch im letztern Fall nehmen mag, der (nur erforderliche) absolute Werth von A aus (12); dann aus (9 und 10), die zugehörigen Werthe von B und C, nachher vier Werthe für z aus (7), nämlich aus

16. $z^2 + Az + B = 0$ und

17. $z^2 - Az + C = 0$ urd endlich die gesuchten vier Werthe für x aus (5).

In dem Falle (14) kommt die Cardanische Formel zur Anwendung; in dem Falle (15) aber ist einer der Winkel φ zu bestimmen, für welche

18. $\cos\varphi = \frac{54(chd)^2 - (D^2 - d^2)^3}{(D^2 - d^2)^3}$ oder bequemer

19. $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{27(chd)^2}{(D^2 - d^2)^3}$ ist, wozu dann

20. $y = \frac{8}{3}(D^2 - d^2)\cos\frac{\varphi}{3}$ gehört.

Soll die Relation zwischen a, b, α und r ermittelt werden, für welche die eine oder die andere dieser Auflösungs-Methoden zur Anwendung kommt, so suche man die Differenz

21. $\delta = (D^2 - d^2)^3 - 27.(chd)^2$ oder, bequemer geordnet,

22. $\delta = (c^2 - d^2 - h^2)^3 - 27d^2h^2(c^2 - d^2 - h^2) - 27d^2h^2(d^2 + h^2)$

in ein Product zu verwandeln. Es wird aber δ *nur für einen reellen* Werth von c^2 zu Null, und dieser ist nach der Cardanischen Formel

23. $c^2 = (d^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}})^3$ und da

$c^2 - (d^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}})^3$ ein Factor von δ ist, der andere Factor Q aber dann die Form $c^4 + kc^2 + l$ haben muss und nur für imaginäre Werthe von c^2 gleich Null werden kann, so wird Q immer als eine Summe zweier Quadrate, d. h. immer positív erscheinen, so dass

also $\delta = [c^2 - (d^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}})^3]\, Q$ positiv wird, wenn $c^2 > (d^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}})^3$ und negativ, wenn $c^2 > (d^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}})^3$ ist.

Hieraus und aus (14. u. 15.) geht demnach, wenn man für c seinen Werth $\frac{2ab}{r}$ einführt, hervor, dass, wenn

24. $r^2 \geqq \frac{4a^2b^2}{(d^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}})^3}$ ist, die Cardanische Formel, wenn aber

25. $r^2 < \frac{4a^2b^2}{(d^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}})^3}$ ist, die trigonometrische Auflösung der Gleichung (13.)

in Anwendung kommt.

In besondern Fällen kann die Lösung sehr einfach werden. Man erhält z. B.

I. Für $a = b$ aus (2.)
   $\sin x = 0$ und auch $\cos x = \frac{r \cos \alpha}{a}$;
   also vier Werthe für x, wenn $r \cos \alpha < a$, und
   nur zwei Werthe 0 und 180°, wenn $r \cos \alpha > a$ ist;

II. Für $\alpha = 90°$ auch unmittelbar aus (2.);
   $\cos x = 0$ und auch $\sin x = \frac{a-b}{2ab} \cdot r$;

III. Für $4c^2 = d^2 + 4h^2$ aus (6.):
   $z = 0$, so wie auch
   $z = -[(c+h)^{\frac{2}{3}} + (c-h)^{\frac{2}{3}}] \cdot \sqrt[3]{4d}$; und aus der Bemerkung zu (2.) erhellet, dass in diesem Falle nur zwei solche Puncte D existiren;

IV. Für $c^2 = h^2 + d^2$ aus (13.):
   $y = 4(2cdh)^{\frac{2}{3}}$ u. s. w.

5.

Geometrische Lehrsätze und Aufgaben.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

---

1. Lehrsatz.

„*Wird eine gegebene Fläche* F *zweiter Ordnung auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System* XYZ *bezogen, dessen Anfangspunct* A *beliebig liegt, so entstehen in jeder Axe* X, Y, Z *zwei Abschnitte, von* A *bis zu den Schnittpuncten mit* F *genommen, die beziehlich durch* x *und* $x_{,}$, y *und* $y_{,}$, z *und* $z_{,}$ *bezeichnet werden sollen, und ferner drei Abschnitte oder Sehnen zwischen den Schnittpuncten, die* α, β, γ *heissen mögen. Wird das rechtwinklige Coordinaten-System, um den nämlichen festen Anfangspunct* A, *auf beliebige Art herumbewegt, so bleibt der Ausdruck*

$$\frac{\alpha^2}{x^2 x_{,}^2} + \frac{\beta^2}{y^2 y_{,}^2} + \frac{\gamma^2}{z^2 z_{,}^2}$$

constant."

Für die Curven zweiter Ordnung findet ein analoger Satz Statt.

2. Lehrsatz.

„*Schneiden sich die drei Diagonalen eines Polyeders von octaedrischer Form in einem Puncte* D *und unter rechten Winkeln, so liegen die Fusspuncte der aus jenem Puncte* D *auf die Seitenflächen gefällten Perpendikel allemal alle acht in irgend einer Kugelfläche.*" Oder:

„*Werden in jeder von drei sich in demselben Puncte* D *rechtwinklig schneidenden Geraden* A, B, C *zwei beliebige Puncte* a *und* α, b *und* β, c *und* γ, *angenommen, gleichviel ob jedes Paar auf gleichen oder auf entgegengesetzten Seiten von* D *liegen, so bestimmen diese Puncte, zu* 3 *und* 3, *acht Ebenen*

$$ab\gamma,\ ac\beta,\ bc\alpha,\ a\beta\gamma,\ b\alpha\gamma,\ c\alpha\beta,\ abc,\ \alpha\beta\gamma,$$

und sodann liegen die Fusspuncte der aus dem Puncte D *auf diese acht Ebenen gefällten Perpendikel in irgend einer Kugelfläche, und zugleich liegen zwölf mal vier derselben in einer Ebene und somit in einem Kreise.*"

In der Ebene hat man den einfacheren Satz:

„Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks rechtwinklig, so liegen die Fusspuncte der aus ihrem Schnittpuncte D *auf die vier Seiten gefällten Perpendikel in einem Kreise."* (Dabei kann das Viereck convex, concav, oder überschlagen sein.)

3. Lehrsatz.

Vier beliebige Puncte A, B, C, D in einer Ebene bestimmen, zu je drei genommen, vier Dreieke; durch die Mitten der Seiten jedes Dreiecks lege man einen Kreis m, so schneiden sich diese vier Kreise m in einem und demselben Puncte P. Ferner: die drei Paar Gerade AB und CD, AC und BD, AD und BC schneiden sich beziehlich in drei Puncten b, c, d, und der durch diese Puncte gelegte Kreis μ geht ebenfalls durch jenen Punct P.

Und ferner: sind D_1, C_1, B_1, A_1 beziehlich die Puncte, in welchen sich die in den Dreiecken ABC, ABD, ACD, BCD aus den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel schneiden, so hat der nämliche Punct P dieselbe Eigenschaft in Rücksicht dieser vier neuen Puncte, d. h. die vier auf gleiche Weise bestimmten Kreise m_1 nebst dem Kreise μ_1 (der durch die analogen Puncte b_1, c_1, d_1 geht) schneiden sich alle in dem nämlichen vorigen Puncte P. Eben so hat dieser nämliche Punct P dieselbe Eigenschaft für die vier neuen Puncte A_2, B_2, C_2, D_2, in welchen die Höhen der vier Dreiecke $D_1C_1B_1$, $D_1C_1A_1$, $D_1B_1A_1$, $C_1B_1A_1$ sich schneiden; u. s. w. f., in's Unendliche.

Liegen insbesondere die vier ursprünglichen Puncte A, B, C, D in einem Kreise M, so liegen die vier Puncte A_1, B_1, C_1, D_1 in einem gleichen Kreise M_1, und noch mehr, so sind die zwei Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ symmetrisch gleich und haben den genannten Punct P zum Symmetralpunct (innern Aehnlichkeitspunct), so dass die vier Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 alle durch diesen Punct P gehen und durch ihn gehälftet werden; eben so die Geraden bb_1, cc_1, dd_1, MM_1, $\mu\mu_1$ nebst den vier Geraden mm_1. Die acht Kreise, die vier m und die vier m_1, sind alle einander gleich; ihre acht Mittelpuncte liegen in einem ihnen gleichen Kreise um den Punct P; und dieser Kreis P hat mit dem Kreise M den Punct M_1 und mit dem Kreise M_1 den Punct M zum äussern Aehnlichkeitspunct. Die vier Mittelpuncte m (so wie die vier m_1) sind die Ecken eines Vierecks, welches dem Viereck $ABCD$ (oder $A_1B_1C_1D_1$) ähnlich ist; die entsprechenden Dimensionen verhalten sich, wie $1:2$. Die Kreise μ und μ_1 berühren einander in P u. s. w. — Die Puncte A_2, B_2, C_2, D_2 fallen beziehlich mit den Puncten A, B, C, D zusammen, d. h. letztere sind

selbst die Schnittpuncte der Höhen der vier Dreiecke $D_1C_1B_1$, $D_1C_1A_1$, $D_1B_1A_1$, $C_1B_1A_1$, so dass also in diesem besondern Falle kein solcher unendlicher Fortgang Statt findet, wie oben, vielmehr den zweimal vier Puncten A, B, C, D und D_1, C_1, B_1, A_1 die Reciprocität zukommt, dass jede Abtheilung die Schnittpuncte der Höhen der durch die andere Abtheilung bestimmten vier Dreiecke ist.

Liegen die vier Puncte A, B, C, D beliebig, so findet ferner noch folgende Eigenschaft Statt. Zieht man aus jedem Puncte Strahlen nach den drei übrigen und legt durch die Mitten dieser Strahlen einen Kreis n, so schneiden sich die auf diese Weise erhaltenen vier Kreise n ebenfalls in einem und demselben Puncte Q, U. s. w.

Hierdurch wird ein früherer Satz in diesem Journal (Bd. II. S. 97. Satz 9.) erweitert. Berlin, im März 1845.

4. Aufgabe.

Folgende zwei Sätze werden allgemein als wahr anerkannt:

I. „Dass neun beliebige Ebenen allemal wenigstens von einer Fläche zweiter Ordnung berührt werden."

II. „Dass der Ort der Scheitel aller rechtwinkligen dreiflächigen Körperwinkel, welche einer Fläche zweiter Ordnung umschrieben sind, eine mit dieser Fläche concentrische Kugelfläche ist, die bei den Paraboloïden in eine Ebene übergeht."

Nun denke man sich ein rechtwinkliges Parallelepipedum (oder auch nur einen Würfel) P und nebstdem durch einen beliebigen Punct D drei zu einander rechtwinklige Ebenen. Alsdann müssen die sechs Seitenflächen von P sammt den drei Ebenen durch D von irgend einer Fläche F zweiter Ordnung berührt werden (I.); und demzufolge müssten dann die acht Ecken E von P nebst dem Puncte D — als Scheitel rechtwinkliger dreiflächiger Körperwinkel, die der Fläche F umgeschrieben sind — alle neun in einer Kugelfläche liegen (II.). Die acht Ecken E liegen in der That immer in einer Kugel und bestimmen sie; da aber der Punct D beliebig ist, so liegt er im Allgemeinen nicht in derselben, so dass also die neun Scheitel, $8E$ und D, zusammen weder in einer Kugel noch in einer Ebene liegen, was offenbar gegen den Satz (II.) streitet. Wie ist dieses Paradoxon zu erklären?

Es ist zu zeigen, dass dieser Widerspruch nur scheinbar ist und dass er die allgemeine Gültigkeit der beiden obigen Sätze nicht aufhebt.

Berlin, im April 1845.

Crelle Journal d. Math. Bd. XXXI Heft 1

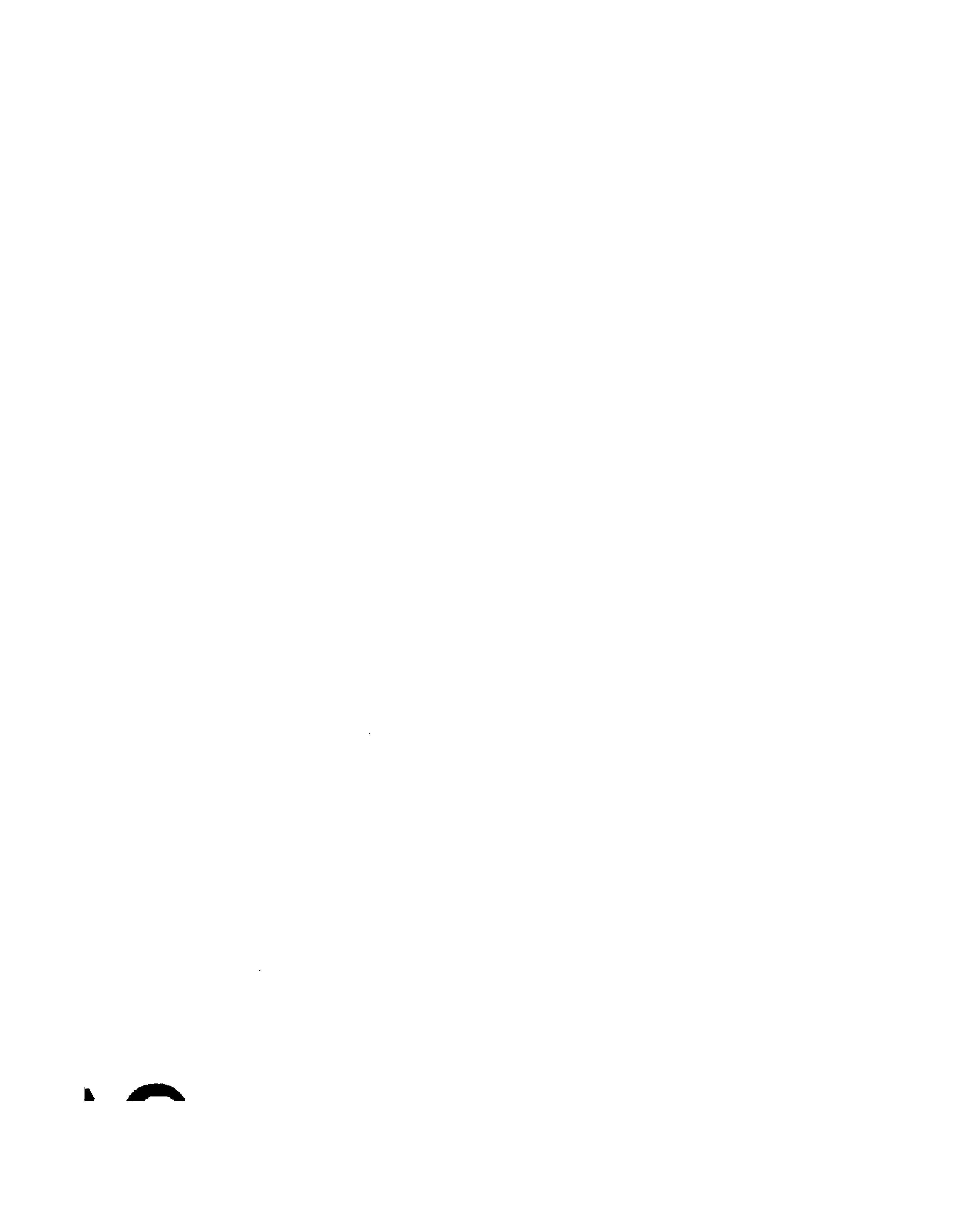
Fac-simile einer Handschrift von Gal. Galiläi

Io ammiro la sua flemma nel legger la Rosa, dove sono tanti, e tanto solenni
BAMBOCCERIE. ma ella mi dirà che pure l'esser queste in tanto eccessivo
grado arreca diletto non piccolo. E chi non trasecolerà nel considerar l'arguzia
dell'Impresa delle 3. Orse nelle 3. caverne l'una delle quali col Telescopio riceve
le macchie del Sole, l'altra lambe i suoi Orsacchini, e la 3.a si succia le mani,
con li 2. motti tanto significanti, e con sì bell'arguzia contraposti: Rosa Ursina
Ursa Rosina.

Dev.mo et Obb.mo Ser.re
Galileo Galilei

vorrei che cercassi di cavarla di là et metterla
in qualche altro monasterio più che venga la sua
ventura persuadendogli che l'aspettare non è senza
suo grande utile, et che ci sono et sono state delle

Pad.a li 4 di Agosto 1600.



6.

Auflösungen und Beweise einer Reihe von Aufgaben und Lehrsätzen der ebenen Geometrie.

(Vom Herrn *A. Jacobi* zu Breslau, Premier-Lieutenant a. D.)

(Schluss der Abhandlung No. 3. im vorigen Hefte.)

VIII.

Ueber eine Reihe von Beziehungen der Pole und Polaren.

---

1. Es sei ein Winkel M gegeben, M sei sein Scheitel, a und b seien seine Schenkel. Stellt man sich diesen constanten Winkel um seinen festen Scheitel gedreht vor, so liegen in M zwei projectivisch gleiche Strahlenbüschel concentrisch, die folglich einen Strahlenbüschel in Involution bilden, dessen zugeordnete Strahlen stets a und b sind.

Nehmen wir jetzt zwei constante Winkel M und M' an, deren Scheitel M und M' und Schenkel a und b, a' und b' sind, lassen diese constanten Winkel sich um ihre festen Scheitel drehen und dabei den Durchschnitt der beiden Schenkel a und a' eine Gerade N durchlaufen, so werden sich die Durchschnitte von b und b', a' und b, a und b' in drei Kegelschnitten bewegen, welche durch die Puncte M und M' gehen. Denn es sind vermöge der Strahlenbüschel in Involution a und b, a' und b' entsprechende Strahlen von projectivischen Strahlenbüscheln, und da auch a und a' entsprechende Strahlen solcher Strahlenbüschel sind, weil der Durchschnitt von a und a' in einer Geraden fortrückt, so sind ferner b und b', a und b', b und a' entsprechende Strahlen dreier verschiedenen projectivischen Strahlenbüschel. Dasselbe gilt offenbar auch, wenn der Durchschnitt von a und a' statt in einer Geraden N in einem Kegelschnitte sich bewegt, der die beiden festen Puncte M und M' enthält. Hierdurch ist der Satz im Anhange No. 16. bewiesen, nemlich:

Drehen sich zwei beliebige, der Grösse nach unveränderliche Winkel um ihre festen Scheitel, und bewegt sich der Durchschnitt zweier Schenkel derselben entweder in einer Geraden, oder in einem die festen Scheitel enthaltenden Kegelschnitt, so wird jeder der andern drei Durchschnitte je zweier jener Schenkel im Allgemeinen einen Kegelschnitt beschreiben, der ebenfalls durch die festen Scheitel geht.

2. Man nehme jetzt der Einfachheit wegen an, dass die Winkel (ab) und $(a'b')$ rechte Winkel sind, nenne den Durchschnitt von a und a' hier δ, und δ', den Durchschnitt von b und b', stelle sich δ in einer Geraden N bewegt vor, und beachte nur allein den Ort des Punctes δ'. Die Puncte δ und δ' sollen zugeordnete Pole heissen. Der Punct δ' beschreibt also einen Kegelschnitt, wenn δ sich in einer Geraden N bewegt, und dieser Kegelschnitt ist im Allgemeinen eine Hyperbel: denn vermöge der rechten Winkel liegen die zugeordneten Pole des Durchschnitts der Geraden N mit MM' und des unendlich entfernten Punctes von N in unendlicher Entfernung. Der Kegelschnitt geht in eine Parabel über, wenn die Gerade MM' mit der N parallel ist, und wird zu einer Geraden, wenn die MM' auf der N senkrecht steht; was sich leicht zeigt. Wir erhalten dadurch sogleich einige Sätze, die wir aufstellen wollen, nemlich:

Sind in einem veränderlichen Vierecke $M\delta M'\delta'$ *zwei gegenüberliegende Ecken* M *und* M', *bei welchen die Winkel des Vierecks rechte Winkel bleiben, fest, und bewegt sich die eine Ecke* δ *in einer Geraden* N, *welche auf* MM' *senkrecht steht, so wird die vierte Ecke* δ' *eine der* N *parallele Gerade beschreiben.*

Ist eine Diagonale MM', *welche Sehne eine Hyperbel ist und auf der einen Asymptote derselben senkrecht steht, eines veränderlichen Vierecks* $M\delta M'\delta'$ *fest, sind die Winkel des Vierecks bei* M *und* M' *rechte und bewegt sich der eine Eckpunct* δ' *in der Hyperbel, so beschreibt die andere Ecke* δ *eine auf der zweiten Asymptote senkrechte Gerade.*

Ist die feste Diagonale MM' *eines veränderlichen Vierecks* $M\delta M'\delta'$ *Sehne einer Parabel, die auf die Richtung des Durchmessers senkrecht steht, bleiben die Winkel bei* M *und* M' *rechte und rückt* δ' *in der Parabel fort, so beschreibt* δ *eine der Richtung des Durchmessers parallele Gerade.*

Bei der Construction dieses §., welche hier festgehalten werden soll, entspricht jeder Geraden N im Allgemeinen eine Hyperbel, die durch drei feste Puncte geht, den Puncten M und M' und dem unendlich entfernten Durch-

schnitte der Senkrechten auf MM' durch die Puncte M und M'. Allen Geraden N, die sich in einem Puncte schneiden, entsprechen Curven, welche noch einen vierten Punct gemein haben.

3. Nimmt man drei feste Puncte M, M' und M'' an, die nicht in einer Geraden liegen, und sucht zu jedem Puncte δ einer Geraden N die zugeordneten Pole δ', δ'' und δ''' in Bezug auf M und M', M und M'', M' und M'', so beschreiben dieselben drei Kegelschnitte, welche sich paarweise in den festen Puncten M, M' und M'' schneiden und einen unendlich entfernten Punct gemein haben, den man durch die Richtung der Senkrechten aus den festen Puncten auf N erhält.

Legt man durch die Puncte M, M' und M'' einen Kreis, und ist $\delta\delta'$ ein Durchmesser desselben, so zeigt sich, dass δ' der zugeordnete Pol von δ, sowohl in Bezug auf M und M', als auch in Bezug auf M und M'', M' und M'' ist. Es heissen dann δ und δ' gemeinschaftlich zugeordnete Pole in Bezug auf je zwei der drei festen Puncte, und wir erhalten Folgendes:

Die gemeinschaftlichen zugeordneten Pole in Bezug auf je zwei von drei festen Puncten liegen in einem durch letztere feste Puncte gegebenen Kreise, und die Geraden, die jene Pole verbinden, schneiden sich im Mittelpuncte dieses Kreises.

Sind hingegen nur zwei Puncte M und M' gegeben, bewegt sich aber der Punct δ in irgend einer Curve $n$ter Ordnung, so wird sein zugeordneter Pol δ' im Allgemeinen eine Curve $2n$ter Ordnung beschreiben; denn jeder Kegelschnitt, der einer Geraden N entspricht, schneidet die Curve $n$ter Ordnung im Allgemeinen in $2n$ Puncten, deren zugeordnete Pole in der Geraden N liegen und auch jener Curve $2n$ter Ordnung angehören. Einem Kegelschnitte entspricht also im Allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung, welche zur 3ten Ordnung, zu einem Kegelschnitt oder in eine Gerade übergeht, wenn der gegebene Kegelschnitt einen, zwei oder drei von den festen Puncte enthält.

4. Es seien zwei Systeme M und M' von zwei Geraden a und b, a' und b' gegeben. Schneiden sich (Fig. 26.) a und b im Puncte M, a' und b' im Puncte M', und nimmt man irgend einen Punct δ an, so kann zu $M\delta$ in Bezug auf a und b ein vierter zugeordneter harmonischer Strahl d, und zu $M'\delta$ in Bezug auf a' und b' ein vierter zugeordneter harmonischer Strahl d' gefunden werden; es ist d die Polare in Bezug auf M und d' die Polare in Bezug auf M' des Punctes δ; und ist δ' der Durchschnitt der Strahlen d und d', so heissen δ und δ' zugeordnete Pole in Bezug auf die beiden Systeme M

und M' von zwei Geraden. Die Strahlen $M\delta$ und d (für jeden beliebigen Punct δ) sind offenbar zugeordnete Strahlen der Involution des Strahlenbüschels M, in welchem a und b die doppelten Strahlen sind: folglich werden jede zwei solche Strahlen $M\delta$ und d entsprechende Strahlen zweier concentrisch projectivischen Strahlenbüschel sein; und dasselbe gilt von den Strahlen $M'\delta$ und d' des Strahlenbüschels M'. Wenn mehrere Strahlenbüschel gegeben sind, und es sind in einer gegebenen Reihenfolge jede zwei auf einander folgenden projectivisch, so sind es alle unter sich; und dies zeigt, dass, wenn δ in einer Geraden N sich fortbewegt, der Punct δ' im Allgemeinen einen Kegelschnitt beschreiben wird.

Die gegebenen vier Geraden a, b, a' und b' schneiden sich noch in den Puncten A, B, C und D, und durch sie wird ein drittes Geradenpaar M'' oder a'' und b'' gegeben, welches sich im Puncte M'' schneidet. Jede Gerade N schneidet die Gerade MM' in einem Puncte δ, dessen zugeordneter Pol der Punct M'' ist; der Geraden N entspricht also ein Kegelschnitt, welcher die Puncte M, M' und M'' enthält. Die vier Puncte A, B, C und D bilden ein vollständiges Viereck, und wenn man in jeder der sechs Seiten desselben, in Bezug auf ihre Endpuncte zu ihrem Durchschnitte mit N, den zugeordneten vierten harmonischen Punct sucht, so findet sich dieser in dem der Geraden N entsprechenden Kegelschnitt, d. h. in dem Kegelschnitte, den der zugeordnete Pol δ' von δ beschreibt, wenn der Punet δ in der Geraden N sich bewegt. Dieser Kegelschnitt, den wir π nennen wollen, ist also durch 9 Puncte gegeben. Da aber zu seiner Bestimmung schon 5 Puncte genügen, jene 9 Puncte aber dieselben bleiben, man mag den der Geraden N entsprechenden Kegelschnitt in Bezug auf die Geradenpaare M und M', oder M und M'', M' und M'' bestimmen, so folgt, dass in allen drei Fällen derselbe Kegelschnitt π erzeugt wird, und daher, dass,

Wenn ein vollständiges Viereck ABCD *gegeben ist,* M, M′ und M″ *die Durchschnitte der drei Seitenpaare sind, und man bestimmt zu irgend einem Puncte* δ *zu den drei Seitenpaaren die drei Polaren, welche in einem Puncte* δ' *sich schneiden, und es bewegt sich* δ *in einer Geraden* N: *so wird der Punct* δ' *im Allgemeinen einen Kegelschnitt* π *beschreiben.*

Jeder Geraden N entspricht ein Kegelschnitt π, und alle diese Kegelschnitte schneiden sich in drei festen Puncten M, M' und M''; allen Geraden N, welche sich in einem Puncte schneiden, entsprechen Kegelschnitte, die einen vierten Punct gemein haben.

Der unendlich entfernten Geraden N' entspricht ein Kegelschnitt π', und jedem Puncte von π' ein Punct von N'. Liegt daher der Punct δ, in welchem sich eine Reihe von Geraden N schneiden, innerhalb des Kegelschnittes π', so sind die jenem N entsprechenden Kegelschnitte alle Hyperbeln; sie sind Hyperbeln und eine Parbel, wenn δ ein Punct von π' ist, hingegen Ellipsen, Hyperbeln und zwei Parabeln, wenn δ' ausserhalb von π' liegt; denn es sind alsdann von δ an den Kegelschnitt π' zwei Tangenten möglich, und jeder entspricht eine Parabel.

5. Nimmt man jetzt drei von einander unabhängige Systeme M, M' und M'' von zwei Geraden gegeben an, und bestimmt zu irgend einem Puncte δ in Bezug auf M und M', M und M'', M' uud M'' die zugeordneten Pole δ', δ'' und δ''', so werden dieselben drei Kegelschnitte beschreiben, wenn sich δ in einer Geraden N bewegt. Die von δ' und δ'' erzeugten Kegelschnitte haben offenbar den Punct M gemein; sie schneiden sich also nothwendig noch in einem Puncte, können aber auch noch drei Puncte gemein haben. Sind der Reihe nach d, d' und d'' die drei Polaren des Punctes δ in Bezug auf M, M' und M'', so werden sich in jedem dieser drei Puncte die Polaren d, d' und d'' schneiden, folglich fallen in ihn die zugeordneten Pole eines Punctes δ in Bezug auf jede zwei der drei gegebenen Systeme zusammen, und hieraus zeigt sich, dass

Die gemeinschaftlichen zugeordneten Pole in Bezug auf je zwei von drei gegebenen Systemen von zwei Geraden im Allgemeinen in einer Curve 3ter Ordnung liegen.

Wenn die beiden Geraden jedes der Systeme M, M' und M'' durch zwei Puncte A und B gehen, so wird die Curve 3ter Ordnung offenbar in die Gerade AB und in einen Kegelschnitte übergehen; denn jeder Punct von AB hat einen gemeinschaftlichen zugeordneten Pol für die drei Systeme in AB.

6. Wir wollen jetzt in Fig. 27. ein System M von zwei Geraden a und b und einen Punct M' gegeben annehmen und zu allen Puncten δ einer Geraden N die zugeordneten Pole δ' bestimmen. Es liegen letztere offenbar im Allgemeinen in einem Kegelschnitte, der die Puncte M und M' enthält; dieser Kegelschnitt geht aber noch durch einen dritten festen Punct δ', der von der Lage der Geraden unabhängig ist, und den man erhält, wenn man zu dem Durchschnitte δ der Geraden MM' und N den zugeordneten Pol sucht. Allen Geraden N entsprechen also wieder Kegelschnitte, die durch drei feste Puncte gehen.

Der unendlich entfernten Geraden N' entspricht offenbar eine Hyperbel $\varkappa'$, welche nothwendig gleichseitig ist: denn schneidet in Fig. 27. die Gerade N das System der beiden Geraden M in den Puncten A und B, so halbirt die Polare d des unendlich entfernten Puncts von N in Bezug auf M die Gerade AB, und es giebt zwei auf einander senkrechte Richtungen, für welche d auf AB senkrecht stehen und für welche also auch die Polare d' von M' der d parallel sein wird. In Folge einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel, dass der Abschnitt einer Tangente zwischen den beiden Asymptoten durch den Berührungspunct halbirt wird, ergiebt sich, dass,

Wenn a *und* b *die beiden Asymptoten sind, ihr Durchschnitt* M *der Mittelpunct einer Hyperbel und* N *irgend eine Tangente derselben ist, die sie im Puncte* x *berührt, und man zieht von irgend einem festen Puncte* M' *eine Senkrechte auf* N, *welche die* Mx *in einem Puncte* y *schneidet: dass dann der Punct* y *eine gleichseitige Hyperbel beschreiben wird, wenn die Gerade* N *als Tangente der gegebenen Hyperbel fortrückt.*

Es wird stets dieselbe gleichseitige Hyperbel beschrieben, die zum Grunde gelegte Hyperbel sei welche man will, wenn sie nur dieselben beiden Asymptoten a und b hat, und wenn nur der Punct M' fest bleibt.

Wir könnten nun noch zwei Puncte und ein System von zwei Geraden, oder einen Punct und zwei Systeme von zwei Geraden zusammen betrachten; was jedoch unterbleiben mag.

7: Man nehme jetzt wieder zwei Systeme M und M' von zwei Geraden an, und setze voraus, dass sich der Punct δ in einer Curve $n$ter Ordnung bewegt, so wird sein zugeordneter Pol δ' im Allgemeinen eine Curve $2n$ter Ordnung beschreiben: denn jeder Geraden N entspricht ein Kegelschnitt $\varkappa$, welcher der Curve $n$ter Ordnung in $2n$ Puncten δ begegnet; folglich liegen die zugeordneten Pole derselben in der Geraden N, und jede Gerade N schneidet daher die nun entstehende Curve in $2n$ Puncten.

Jeder Curve φ *von der* n*ten Ordnung entspricht im Allgemeinen eine Curve* ψ *von der* 2n*ten Ordnung.*

In Fig. 26. die wir hier zum Grunde legen, schneiden sich nach §. 4. alle Kegelschnitte $\varkappa$, welche den verschiedenen Geraden N entsprechen, in den drei festen Puncten M, M' und M'', welche Hauptpuncte genannt werden, und diese Hauptpuncte sind $n$fache Puncte der Curve ψ von der $2n$ten Ordnung: denn da eine Gerade N die φ nur in n Puncten schneidet, so wird ihr ent-

sprechender Kegelschnitt π auch der Curve ψ nur in n statt in $4n$ Puncten begegnen, und es liegen daher $3n$ Puncte in den Puncten M, M' und M''.

Jeder Tangente N von φ entspricht nun offenbar ein Kegelschnitt π, der die Curve ψ in einem Puncte berührt, und da bekanntlich an eine Curve φ von der $n$ten Ordnung von einem Puncte aus im Allgemeinen $n(n-1)$ Tangenten möglich sind, so lassen sich durch die drei Hauptpuncte und irgend einen beliebigen vierten Punct im Allgemeinen $n(n-1)$ Kegelschnitte π legen, welche die Curve ψ von der $2n$ten Ordnung berühren. Den $n(n-1)$ Tangenten von φ, welche einer gegebenen Richtung parallel sind, entsprechen Kegelschnitte π, die sich in einem Puncte desjenigen Kegelschnitts π' schneiden, welcher der unendlich entfernten Geraden N' entspricht. Wir wissen, dass die Mittelpuncte aller Kegelschnitte, welche sich in 4 Puncten schneiden, im Allgemeinen wieder in einem Kegelschnitte liegen, der durch die Halbirungspuncte der 6 Seiten des allen Kegelschnitten gemeinschaftlich eingeschriebenen vollständigen Vierecks geht. Legt man also durch irgend einen Punct ν und durch die drei festen Puncte M, M' und M'' die $n(n-1)$ Kegelschnitte, welche die Curve ψ berühren, so liegen die Mittelpuncte jeder solchen Gruppe von Kegelschnitten in einem neuen Kegelschnitte α, und alle diese Kegelschnitte α gehen durch drei feste Puncte, durch die Halbirungspuncte der Seiten des Dreiecks $MM'M''$. Es liegen daher die Mittelpuncte aller Kegelschnitte, welche ψ berühren, in einer Curve, die von jedem Kegelschnitte α in $n(n-1)$ Puncten geschnitten wird, und da alle diese α durch drei feste Puncte gehen, so folgt umgekehrt, dass

Die Mittelpuncte aller Kegelschnitte π, welche die Curve ψ von der $2n$*ten Ordnung berühren, in einer Curve φ von der* $2n(n-1)$*ten Ordnung liegen.*

Diese Curve φ hat also im Allgemeinen $2n(n-1)$ unendlich entfernte Puncte, d. h. es liegen $2n(n-1)$ Mittelpuncte jener Kegelschnitte in unendlicher Entfernung.

Unter den Curven π, welche die Curve ψ berühren, sind im Allgemeinen, und höchstens $2n(n-1)$ *Parabeln.*

Um eine Parabel zu erzeugen, ist aber erforderlich, dass die ihr entsprechende Gerade N den Kegelschnitt π' berühre; alle Tangenten der Curve φ welche die obigen Parabeln erzeugen, werden daher auch den Kegelschnitt π', welcher der unendlich entfernten Geraden entspricht, berühren. Die Lage von π' gegen φ ist ganz beliebig und es zeigt sich, dass

Eine Curve φ *von der* n*ten Ordnung und irgend ein Kegelschnitt im Allgemeinen* $2n(n-1)$ *gemeinschaftliche Tangenten haben.*

8. Nimmt man an, die Curve φ sei ein Kegelschnitt, so wird im Allgemeinen ψ eine Curve von der 4ten Ordnung werden, und man erhält leicht diejenigen Beziehungen wieder, die wir in VI. §. 3. aufgestellt haben. Wir wollen noch Einiges über die drei Hauptpuncte M, M' und M'' Fig. 26. sagen, welche jetzt zu Doppelpuncten der Curve ψ werden. Schneidet der Kegelschnitt φ die Gerade MM' in zwei Puncten, so entspricht diesen beiden Puncten der Punct M'', und die zugeordneten Pole aller Puncte von φ, die der Geraden MM' zunächst liegen, werden dem Puncte M'' zunächst liegen, und es ist leicht zu sehen, dass sich in M'' zwei reelle Zweige der Curve ψ schneiden. Ist MM'' eine Tangente des Kegelschnitts φ, so bildet, wie leicht ersichtlich, der Punct M'' eine Spitze und es wird offenbar M'' zu einem isolirten Punct, wenn die Gerade MM' dem Kegelschnitte φ nicht begegnet. Dieselben Beziehungen sind gültig für den Punct M und die Gerade $M'M''$, und für den Punct M' und die Gerade MM'', und zwar in Bezug auf die Lage von φ gegen diese Geraden. Es können zehn verschiedene Fälle in dieser Beziehung Statt finden, nemlich folgende:

a) Die Curve φ schneidet alle drei Seiten des Dreiecks $MM'M''$ in zwei reellen Puncten; die Curve ψ hat drei eigentliche Doppelpuncte.

b) Es schneidet φ zwei Seiten und berührt die dritte Seite des Dreiecks; ψ hat zwei eigentliche Doppelpuncte und eine Spitze.

c) Es schneidet φ zwei Seiten des Dreiecks und trifft die dritte Seite gar nicht: ψ hat zwei eigentliche Doppelpuncte und einen isolirten Punct.

d) Es schneidet φ eine Seite und berührt die beiden andern Seiten des Dreiecks; ψ hat einen Doppelpunct und zwei Spitzen.

e) Es schneidet φ eine Seite, berührt die zweite, und trifft die dritte Seite gar nicht; ψ hat einen Doppelpunct, eine Spitze und einen isolirten Punct.

f) Es schneidet φ eine Seite und begegnet den beiden andern nicht; ψ hat einen Doppelpunct und zwei isolirte Puncte.

g) Es berührt φ alle drei Seiten des Dreiecks; ψ hat drei Spitzen.

h) Es berührt φ zwei Seiten und trifft die dritte gar nicht; ψ hat zwei Spitzen und einen isolirten Punct.

i) Es berührt φ eine Seite und begegnet den beiden andern nicht; ψ hat eine Spitze und zwei isolirte Puncte.

k) Es begegnet φ keiner Seite des Dreiecks; ψ hat drei isolirte Puncte.

Diese Fälle sind von *Plücker* in seiner Theorie der algebraischen Curven angeführt.

Die Lage von φ gegen den Kegelschnitt π', welcher der unendlich entfernten Geraden entspricht, wird die Natur der unendlich entfernten Puncte von ψ geben. Wir bemerken hierbei noch, dass ein oder zwei der Hauptpuncte M, M' und M'' in unendlicher Entfernung liegen können.

9. Man nehme jetzt in Fig. 28. irgend einen Kegelschnitt als gegeben an, und lege durch irgend einen Punct P eine Reihe von Sehnen AA', BB', CC', ... desselben, so liegen die Durchschnitte der Tangenten des Kegelschnitts durch die Endpuncte dieser Sehnen in einer Geraden N: der Polaren des Punctes P (V. §. 6.). Die vier Puncte A, B, A' und B' bilden ein vollständiges Viereck, von welchem das eine Seitenpaar in P und die beiden andern Seitenpaare in den Puncten γ und γ' der Geraden N sich schneiden werden, und es ist bekanntlich $P\gamma$ die Polare des Punctes γ', $P\gamma'$ die Polare des Punctes γ in Bezug auf den Kegelschnitt. Halten wir die Sehne AA' fest und stellen uns BB' um den Punct P gedreht vor, so rücken die Puncte γ und γ' in der Geraden N fort. Da nun stets die Durchschnitte von AB und AB' die Puncte γ und γ' bestimmen, AB und AB' aber zugeordnete Strahlen der Involution des Strahlenbüschels A sind, wenn sich BB' um P dreht (V. §. 3.), so sind auch γ und γ' stets zugeordnete Puncte der Involution der Geraden N. Hiernach kann man die Gerade N und den Strahlenbüschel P als projectivische Gerade ansehen, und jedem Puncte γ von N entspricht ein Strahl $P\gamma'$, der die Polare des Punctes γ ist. In der Figur sind also nach bekannten Sätzen auch α und α', β und β' zugeordnete Puncte der Involution von N, wenn z. B. α der Pol von AA' und α' der Durchschnitt von AA' mit N ist. Wir erinnern hier an die bekannte Construction der Aufgabe: von einem Puncte aus die möglichen Tangenten an einen Kegelschnitt zu legen.

Es ist nun offenbar auch P der Mittelpunct eines Strahlenbüschels in Involution; es sind $P\gamma$ und $P\gamma'$ zugeordnete Strahlen desselben, und es folgt, dass

Jeder Punct P *in der Ebene eines Kegelschnitts der Mittelpunct eines Strahlenbüchels in Involution ist; und zwar ist jedem Strahle derjenige Strahl zugeordnet, der durch den Pol des erstern geht.*

Jede Gerade N *in der Ebene eines Kegelschnitts enthält ein Puncten-System in Involution; und zwar ist jedem Puncte γ von* N *der Durchschnitt seiner Polaren* Pγ' *mit* N *zugeordnet.*

Die Eigenschaften eines Strahlenbüschels in Involution ergeben, dass

Durch jeden Punct in der Ebene eines Kegelschnitts zwei sich rechtwinklig schneidende Geraden denkbar sind, so dass der Pol der einen Geraden auf der andern liegt.

Ist N die unendlich entfernte Gerade, also P der Mittelpunct des Kegelschnitts, so folgt, dass

Durch den Mittelpunct eines Kegelschnitts immer zwei auf einander senkrechte Durchmesser (die Axen) denkbar sind, so dass der Pol des einen auf dem andern Durchmesser liegt.

Jede zwei Durchmesser, von denen der Pol des einen der unendlich entfernte Punct des andern ist, werden zugeordnete Durchmesser genannt, und folglich

Wird ein System von drei Paar zugeordneten Durchmessern eines Kegelschnitts von sechs Strahlen in Involution gebildet.

10. Nehmen wir jetzt zwei Kegelschnitte μ und μ' als gegeben an, und irgend eine Gerade N, und ist P der Pol von N in Bezug auf μ und P' der Pol von N in Bezug auf μ', so entsprechen jedem Puncte δ von N zwei Polaren d und d' in Bezug auf μ und μ', die sich um die Puncte P und P' drehen und deren Durchschnitt δ' im Allgemeinen einen Kegelschnitt $\varkappa$ erzeugt, wenn sein zugeordneter Pol δ' in der Geraden N fortrückt; denn es ist N mit beiden Strahlenbüscheln dem vorigen §. zufolge projectivisch.

Wir könnten nun hier Das wörtlich wiederholen, was über zwei oder drei Systeme von zwei Gerade gesagt ist. Jedoch hat Solches nur seine volle Gültigkeit, wenn die beiden Kegelschnitte sich in vier reellen, oder zwei reellen und zwei imaginären Puncten, oder in vier imaginären Puncten schneiden; dabei können zwei der Hauptpuncte imaginär werden. Bei andern Lagen der Kegelschnitte treten zum Theil andre Beziehungen ein, die leicht zu finden sind, und die wir nicht anführen wollen.

Endlich könnten wir noch Kegelschnitte mit Systemen von zwei Geraden oder Puncten zusammenstellen.

IX.

Beweise der Sätze im Anhange No. 47. und No. 52. links, und damit zusammenhängende Beziehungen.

Es sei Fig. 29. irgend ein Kegelschnitt gegeben. Dreht sich eine Sehne AA' desselben um einen festen Punct S, und werden von zwei festen Puncten P und P' des Kegelschnitts nach den Puncten A und A' Strahlen gezogen, so bewegen sich die Durchschnitte x und y von PA' und $P'A$, PA und $P'A'$ in einem Kegelschnitte π, wenn sich AA' um den Punct S dreht; es folgt dies aus V. §. 3. u. s. w. Ist z der Durchschnitt der Tangenten durch P und P' an den gegebenen Kegelschnitt μ, so folgt nach den bekannten Beziehungen eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks $AA'PP'$, dass sich die Gerade xy um den Punct z dreht. Die Gerade xy schneidet μ in den Puncten a und b, und es sind offenbar a und b zu y und x zugeordnete harmonische Puncte: die Polare des Punctes b in Bezug auf π geht folglich durch den Punct a. Jedem Puncte S entspricht ein Kegelschnitt π, der die beiden festen Puncte P und P' enthält; und rückt S in einer bestimmten Sehne AA' von μ fort, so schneiden sich die diesen Puncten S entsprechenden Kegelschnitte π noch in zwei Puncten x und y. In der vorigen Nummer wurde gezeigt, dass der Ort der gemeinschaftlichen zugeordneten Pole in Bezug auf drei sich in zwei Puncten P und P' schneidenden Kegelschnitte die Gerade PP' und ein Kegelschnitt ist, der hier offenbar der Kegelschnitt μ sein wird.

Haben demnach drei Kegelschnitte π zwei gemeinschaftliche Puncte P und P', so ist der Ort der gemeinschaftlichen zugeordneten Pole in Bezug auf je zwei dieser Kegelschnitte ein neuer Kegelschnitt μ, der durch die Puncte P und P' geht. Die Geraden, welche je zwei solche gemeinschaftlichen zugeordneten Pole verbinden, gehen durch einen Punct z, den Pol der Geraden PP' in Bezug auf μ; und in z schneiden sich die Verbindungslinien der beiden andern Durchschnitte jeder zwei der Kegelschnitten π.

Für einen bestimmten Punct S erhalten wir also einen bestimmten Kegelschnitt π, der die Puncte P und P' enthält. Liegt S, wie in Fig. 29., ausserhalb des Kegelschnitts μ: sind also von S an μ zwei Tangenten möglich, die μ in den Puncten Q und Q' berühren: so wird offenbar der Kegelschnitt π auch durch diese Puncte Q und Q' gehen. Die Polaren der vier Puncte P, P', Q und Q'

in Bezug auf μ sind nach unserer Construction Tangenten von π, und die Polaren der Puncte Q und Q' müssen nach dem obigen Satze durch den Punct z gehen. Der Kegelschnitt π ist also durch 4 Puncte und 4 Tangenten gegeben, und dieselben Elemente enthält ein Kegelschnitt, wenn man anstatt der Puncte P und P' die Puncte Q und Q' als fest betrachtet und zu dem Puncte z nach der obigen Construction den entsprechenden Kegelschnitt bestimmt. Beide Kegelschnitte fallen daher in einen zusammen, und es sind folglich auch PS und $P'S$ Tangenten desselben; nach dem obigen Satze. Ein Kegelschnitt ist aber schon durch 5 Puncte vollständig bestimmt, und die Bedingung, dass er eine Gerade in einem gegebenen Puncte berühren soll, gilt für 2 Puncte, folglich

Schneiden sich zwei Kegelschnitte μ und π in 4 Puncten; und gehen von den 8 Tangenten an beide Kegelschnitte durch diese 4 Puncte drei durch einen Punct, so geht durch ihn noch eine vierte Tangente, und die 4 andern Tangenten schneiden sich auch in einem Puncte.

Es folgt aber ferner, dass

Zieht man von zwei Puncten S *und* z *Tangenten an einen Kegelschnitt μ, die ihn in* Q *und* Q', P *und* P' *berühren, so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt π, der die Geraden* SP, SP', ZQ *und* ZQ' *in den Puncten* P, P', Q *und* Q' *berührt.*

Es sei der gegebene Kegelschnitt P insbesondere ein Kreis Fig 30.; P und P' seien die festen Puncte desselben und S irgend ein unendlich entfernter Punct, die Tangenten SQ und SQ' an μ seien also parallel und QQ' sei ein Durchmesser des Kreises. Ist α ein zweiter Kreis, der mit μ concentrisch liegt und die PP' berührt und zieht man die Sehnen AA' und BB' von μ durch den unendlich entfernten Punct S, die gleichzeitig Tangenten von α sind, so werden offenbar PA und $P'A'$, PB' und $P'B$ zu Parallelen und die Richtungen dieser Parallelen stehen senkrecht auf einander. Dem unendlich entfernten Puncte S entspricht daher eine gleichseitige Hyperbel und es folgt, dass

Die beiden Endpuncte eines Durchmessers und die beiden Endpuncte einer Sehne eines Kreises im Allgemeinen in einer gleichseitigen Hyperbel liegen.

X.

Kegelschnitte, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt einen doppelten Contact haben.

1. Es seien in Fig. 31. A und A', B und B', C und C',..... entsprechende Puncte zweier projectivischen Vielecke M und M' eines Kegelschnitts (V.), so liegen die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AC' und $A'C$,.... in einer Geraden N. Nimmt man einmal die Puncte B und B' und zweitens die Puncte C und C' zu festen Puncten und bezieht in beiden Fällen die festen Puncte, als Mittelpuncte von projectivischen Strahlenbüscheln, auf die ihnen zugehörigen Systeme M und M', so erhält man zwei Kegelschnitte π und π', die sich in dem Pole p von N und den reellen oder imaginären Durchschnitten von N mit der gegebenen Curve μ schneiden (VI. §. 1). In der Figur ist der Durchschnitt y von BA und $B'A'$ ein Punct der Curve π, und der Punct z, der Durchschnitt von CA und $C'A'$, ist ein Punct von π', und es folgt dass die Gerade py durch den Durchschnitt von AA' und BB', also durch den Punct a geht und dass auch pz durch den Durchschnitt a' von AA' und CC' gehen wird. In Bezug auf die Curve π sind B und p die Mittelpuncte projectivischer Strahlenbüschel, welche π erzeugen, und jede zwei, in einem Puncte y von π sich schneidenden Strahlen α und α''' sind entsprechende Strahlen derselben; in Bezug auf π' sind C und p die Mittelpuncte projectivischer Strahlenbüschel und α' und α'' sind entsprechende Strahlen derselben; in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt werden offenbar B und C Mittelpuncte projectivischer Strahlenbüschel sein, von denen α'' und α''' entsprechende Strahlen sind, wenn man für AA' irgend eine andere Sehne DD', EE',.... der gegebenen Curve μ nimmt. Es liegen daher in p zwei projectivische Strahlenbüschel concentrisch und α und α' sind entsprechende Strahlen derselben, welche die Geraden BB' und CC' in entsprechenden Puncten a und a' zweier projectivischen Geraden schneiden. Sind also zwei projectivische Vielecke M und M' eines Kegelschnitts gegeben und A und A', B und B', C und C', D und D',..... entsprechende Puncte derselben, so werden je zwei der Geraden BB' und CC' die entsprechenden Puncte verbinden, von allen übrigen dieser Geraden AA', DD',..... projectivisch geschnitten, und diese Geraden umhüllen einen Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt hat mit dem gegebenen

einen doppelten Contact; was sich zeigen wird, wenn wir beweisen können, dass er und der gegebene Kegelschnitt in Bezug auf die Gerade N denselben Pol p haben. Um dies zu zeigen, ziehe man durch den Punct p die Sehnen BD, $B'D'$, CE und $C'E'$ des gegebenen Kegelschnitts, so sind auch DD' und EE' Tangenten jenes Kegelschnitts φ, der mit μ einen doppelten Contact haben soll. Es schneiden sich aber offenbar die Sehnen CE' und $C'E$, BD' und $B'D$, BB' und DD', CC' und EE' in N, und die letztern vier Sehnen BB', DD', CC' und EE', die Tangenten von φ, bilden ein vollständiges Vierseit, in welchem in Folge der harmonischen Beziehungen zwei Diagonalen in p sich schneiden: folglich ist p auch der Pol der Geraden N in Bezug auf den Kegelschnitt φ, und φ hat mit μ einen doppelten Contact. Dieser doppelte Contact wird reell, wenn von p an μ zwei Tangenten möglich sind, also die N den Kegelschnitt μ in zwei Puncten schneidet; schneidet die N den Kegelschnitt μ gar nicht, so ist der doppelte Contact imaginär und er geht in eine vierpunctige Osculation über, wenn N eine Tangente von μ wird.

Sind also zwei projectivische Vielecke eines Kegelschnitts gegeben, so sind die Geraden, welche entsprechende Puncte derselben verbinden, Tangenten eines neuen Kegelschnitts, der mit dem gegebenen einen doppelten Contact hat.

2. Sind ein Kegelschnitt μ und drei Sehnen AA', BB', CC' desselben gegeben, so lassen sich folgende Schema's bilden (V. §. 6.)·

$$\frac{A,\ B,\ C}{A',\ B',\ C'},\qquad \frac{A,\ B,\ C'}{A',\ B',\ C},\qquad \frac{A,\ B',\ C}{A',\ B,\ C'},\qquad \frac{A,\ B',\ C'}{A',\ B,\ C}$$

und es folgt daraus, da zwei projectivische Vielecke durch 3 entsprechende Punctenpaare gegeben sind, der bekannte Satz, dass

Im Allgemeinen 4 Kegelschnitte möglich sind, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt μ einen doppelten Contact haben und drei Sehnen desselben berühren.

Der doppelte Contact findet in den 4 Geraden der obigen Schema's Statt. Sind nur zwei Sehnen AA' und BB' gegeben, so können unzählige Kegelschnitte mit dem gegebenen einen doppelten Contact haben und diese beiden Sehnen berühren. Für alle solche Kegelschnitte muss aber

$$\frac{A,\ B}{A',\ B'},\qquad \frac{A,\ B'}{A',\ B}$$

werden, d. h. die gemeinschaftlichen Berührungssehnen dieser Kegelschnitte mit dem gegebenen schneiden sich in zwei festen Puncten x und y, den Durchschnitten von AB' und $A'B$, AB und $A'B'$. Von jedem der Puncte x und

sind im Allgemeinen an μ zwei Tangenten möglich, folglich

Sind im Allgemeinen 4 Kegelschnitte möglich, welche einen gegebenen Kegelschnitt in einem Puncte vierpunctig osculiren und zwei Sehnen desselben berühren.

8. Da jeden zwei projectivischen Vielecken eines Kegelschnitts zwei projectivische Strahlenbüschel zum Grunde liegen, so zeigt sich, dass,

Wenn in einem Kegelschnitte eine Reihe von Vielecken gegeben ist, und jedes mit dem darauf folgenden projectivisch ist, so sind auch das erste und das letzte und überhaupt jede zwei beliebige Vielecke jener Reihe projectivisch.

Dieser Satz ist sehr vieler Folgerungen fähig und enthält viele der Resultate, die man in dem „*Traité des propriétés projectives des figures par Poncelet, Section IV. Chapitre II.*" findet. Wir wollen einige derselben anführen. Es folgt, dass,

Wenn eine Reihe von n *Kegelschnitten gegeben ist, die mit einem andern Kegelschnitt* μ *einen doppelten Contact haben, und es bewegen sich* n *Seiten eines beliebigen veränderlichen* (n + 1)*-Ecks als Tangenten jener Kegelschnitte, während alle seine Ecken in* μ *fortrücken, so werden die freie Seite und alle Diagonalen des* (n + 1)*-Ecks Kegelschnitte umhüllen, die mit dem gegebenen ebenfalls einen doppelten Contact haben.*

An die Stelle jedes der obigen Kegelschnitte, die mit μ einen doppelten Contact haben, kann ein Punct treten, um welchen sich eine Seite des $(n+1)$-Ecks dreht, und es folgt insbesondere, dass,

Wenn sich alle Seiten, bis auf eine, eines veränderlichen Vielecks, um feste Puncte drehen, während alle seine Ecken in einem gegebenen Kegelschnitt μ *fortrücken, die freie Seite und alle Diagonalen des Vielecks im Allgemeinen Kegelschnitte umhüllen, die mit* μ *einen doppelten Contact haben.*

Sind also n feste Puncte gegeben, um die sich in einer bestimmten Reihenfolge n Seiten eines veränderlichen $(n + 1)$-Ecks drehen, während seine Ecken in einem gegebenen Kegelschnitt μ sich bewegen, so umhüllt die freie Seite einen Kegelschnitt, der mit μ einen doppelten Contact hat, und in jedem der beiden Berührungspuncte geht die freie Seite in einen Punct, also das $(n+1)$-Eck in ein n-Eck über.

Es sind im Allgemeinen zwei n*-Ecke denkbar, deren Ecken in einem gegebenen Kegelschnitt liegen und deren Seiten in einer gegebenen Ordnung durch* n *feste Puncte gehen.*

Die n Puncte lassen sich aber in $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)}{2}$ verschiedenen Reihenfolgen nehmen, folglich sind im Ganzen $1.2.3\ldots(n-1)$ verschiedene n-Ecke denkbar, die der obigen Forderung genügen werden.

An die Stelle jedes oder aller der n festen Puncte kann ein Kegelschnitt genommen werden, der mit dem gegebenen einen doppelten Contact hat, und es kann verlangt werden, dass eine Seite des n-Ecks ihn berührt. Es ist jedoch dann genau auf die verschiedenen möglichen Lagen der Tangenten zu achten.

XI.

Construction von Curven mit zwei n-fachen Puncten.

1. Wir haben in IX. Fig. 29. gesehen, dass in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt μ jedem Puncte S ein Kegelschnitt π entspricht, wenn in μ zwei feste Puncte P und P' gegeben sind, und den man erhält, wenn man um S eine Sehne AA' von μ sich drehen lässt und die Durchschnitte x und y von $P'A$ und PA', PA und $P'A'$ bestimmt, die π erzeugen.

Stellt man sich um P und P' zwei Sehnen Pa' und $P'a$ von μ gedreht vor, die in allen ihren Lagen unter sich parallel bleiben, so wird aa' im Allgemeinen einen Kegelschnitt umhüllen, der mit μ in der unendlich entfernten Geraden einen doppelten Contact hat, die PP' berührt, mit μ ähnlich ist und auch mit μ concentrisch und ähnlich liegt; dieser Kegelschnitt heisse π'. Es ist nun aus der Construction von π leicht ersichtlich, dass π zu einer Hyperbel wird, wenn aus S an π' zwei Tangenten möglich sind; es ist π eine Parabel, wenn S ein Punct von π' ist und eine Ellipse, wenn aus S keine Tangenten an π' gelegt werden können.

Bewegt sich der Punct S in einer Geraden, so entsprechen seinen verschiedenen Lagen Kegelschnitte π, welche ausser den beiden Puncten P und P' noch zwei reelle Durchschnitte x und y oder zwei imaginäre Durchschnitte gemein haben, je nachdem jene Gerade den Kegelschnitt μ schneidet, oder nicht.

Wenn sich die Sehne AA' von μ, anstatt um einen Punct S sich zu drehen, als Tangente einer Curve von der $n$ten Ordnung bewegt, so fragt es sich

welche Curve ψ die Puncte x und y, die Durchschnitte von PA' und $P'A$, PA und $P'A'$, wo P und P' feste Puncte von μ bleiben, beschreiben werden?

Stellen wir uns die ganze Schaar der möglichen Kegelschnitte β, welche mit dem gegebenen Kegelschnitt μ einen doppelten Contact haben und PP' berühren, und vorläufig AA' als Tangente eines dieser Kegelschnitte β bewegt vor, so beschreibt z. B. der Punct y eine Gerade N, welche die gemeinschaftliche Berührungssehne von β und μ ist, und der Punct x alsdann einen durch P und P' gehenden Kegelschnitt. Wir wissen ferner, dass ein Kegelschnitt β und irgend eine Curve φ von der $n$ten Ordnung im Allgemeinen $2n(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten haben (VIII. §. 7.), und es folgt hieraus, dass im Allgemeinen $2n(n-1)$ Puncte x der Curve ψ in einer Geraden liegen werden und dass mithin

Jeder Curve φ von der 2n*ten Ordnung im Allgemeinen eine Curve ψ von der* $2n(n-1)$*ten Ordnung entspricht.*

Der Kegelschnitt, welchen der Punct x beschreibt, schneidet die Curve ψ ebenfalls in $2n(n-1)$ Puncten: da aber im Allgemeinen $4n(n-1)$ solcher Durchschnitte vorhanden sein müssen, so liegen $2n(n-1)$ dieser Puncte in den Puncten P und P', und folglich ist jeder dieser Puncte P und P' ein $n(n-1)$-facher Punct. Dies zeigt sich auch leicht, da aus einem Puncte A von μ nur $n(n-1)$ Tangenten an φ möglich sind und in der Geraden PA nur $n(n-1)$ Puncte y liegen.

Die Curve ψ von der $2n(n-1)$*ten Ordnung hat also zwei* $n(n-1)$-*fache Puncte.*

2. Jedem Kegelschnitte φ entspricht demnach eine Curve ψ von der 4ten Ordnung, und diese hat zwei Doppelpuncte.

Die verschiedenen möglichen Lagen des Kegelschnitts φ gegen die Kegelschnitte β, welche PP' berühren und mit μ einen doppelten Contact haben, führen zu verschiedenen Aufgaben und Eigenschaften der Curve ψ 4ter Ordnung.

Wenn sich ein Kegelschnitt β und der Kegelschnitt φ in einem Puncte berühren, so wird auch die gemeinschaftliche Berührungssehne N von β und μ zu einer Tangente von ψ. Mit Hülfe der Curve ψ lässt sich also, wenn man eine Tangente an sie legen kann, die Aufgabe lösen:

Einen Kegelschnitt β zu construiren, der mit einem gegebenen Kegelschnitte μ einen doppelten Contact hat und eine Sehne PP' *desselben nebst einem beliebigen Kegelschnitt φ in einem gegebenen Puncte berührt.*

Hat β mit φ einen doppelten Contact, so wird die gemeinschaftliche Berührungssehne von β und μ zu einer Doppel-Tangente von ψ; und kann diese gefunden werden, so ist auch die Auflösung der Aufgabe:

Einen Kegelschnitt β zu finden, der mit zwei gegebenen Kegelschnitten μ und φ einen doppelten Contact hat und eine Sehne PP' des ersteren μ berührt,

gegeben u. s. w. Umgekehrt: können diese Aufgaben gelöset werden, so sind die ihnen entsprechenden von der Curve ψ gegeben. Von der ersten Aufgabe lässt sich in der That eine einfache Lösung geben, die jetzt folgen soll. Diese Aufgabe ist mit nachstehender dieselbe:

Einen Kegelschnitt zu construiren, der in Fig. 32. mit einem gegebenen Kegelschnitt μ einen doppelten Contact hat, die AA' *im Puncte* z *berührt und* PP' *zur Tangente hat.*

Man suche in AA' in Bezug auf A und A' zu z den vierten zugeordneten harmonischen Punct q, bestimme die Durchschnitte w und r von AP und $A'P$, AP' und $A'P$, so sind die Geraden qw und qr diejenigen, in welchen die beiden möglichen Kegelschnitte mit μ einen doppelten Contact haben, und beide Geraden sind auch Tangenten von ψ, welche ψ in den Puncten w und r berühren.

Wir bringen hier schliesslich eine Bemerkung *Poncelet's* in Erinnerung, dass z. B. zwei Kegelschnitte, die sich in einem Puncte berühren, im Allgemeinen 3 gemeinschaftliche Tangenten haben, und die Tangente durch jenen Berührungspunct für zwei Tangenten zu nehmen ist.

7.

Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein-geometrischen Analyse.

(Vom Herrn *Dr. Herrman Grassmann*, Lehrer der Mathematik zu Stettin.)

Durch Anwendung einer neuen Analyse, welche ich in einem unlängst erschienenen Werke *) in ihren Grundzügen dargestellt habe, bin ich zu einer neuen Theorie der algebraischen Curven und Oberflächen gelangt, welche sich von allen bisherigen Theorieen über diesen Gegenstand dadurch unterscheidet, dass sie alle algebraischen Curven und Oberflächen auf rein-geometrische Weise behandelt, in demselben Umfange, wie solche Behandlung den Kegelschnitten zu Theil geworden ist. Versucht man das Princip der projectivischen Erzeugung, welches *Steiner* mit so glänzendem Erfolge auf die Behandlung der Kegelschnitte angewandt hat, auch auf Curven höherer Ordnungen auszudehnen, so gelangt man nur zu besondern Curvengattungen; nemlich zu denjenigen, welche *Möbius* in seinem barycentrischen Calcul behandelt hat und welche, wenn sie von $n$ter Ordnung sind, im Allgemeinen durch $3n-1$ Puncte bestimmt werden während die allgemeinen Curven $n$ter Ordnung bekanntlich $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte zu ihrer Bestimmung erfordern **). Jene Curven haben da Eigenthümliche, dass sie sich durch blosses Ziehen von geraden Linien construiren lassen ***). Da nun diese construirbaren Curven, wenn sie von dritter Ordnung sind, durch $3.(3-1)$ d. h. durch 8, hingegen die allgemeinen Curven dritter Ordnung durch 9 Puncte bestimmt werden, während die Curven zweiter Ordnung beiderseits durch 5 Puncte bestimmt sind, so sieht man, wie die projectivische Erzeugung zwar zur allgemeinen Behandlung der Curven zweiter

---

*) Die Ausdehnungslehre, erster Theil; enthaltend die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1844.

**) Ich werde in dieser Abhandlung auf diese besondern Curven, auf ihre projectivische Erzeugung oder ihre Erzeugung durch Ziehen von geraden Linien, zurückkommen.

***) Vergl. Möbius barycentr. Calcul §. 69. und 70.

Ordnung, aber keinesweges zu der allgemeinen Behandlung der Curven höherer Ordnungen ausreicht. Diesem Mangel soll die neue Theorie abhelfen, indem sie auch diejenigen algebraischen Curven einer rein geometrischen Behandlung zugänglich macht, welche sich nicht durch blosses Ziehen von geraden Linien erzeugen lassen. Der Hauptsatz, auf welchen ich die Theorie gründe, findet sich schon in meiner Ausdehnungslehre (§. 145.—148.), ohne dass ich jedoch dort hätte Raum finden können, um über die Fruchtbarkeit dieses Satzes mehr als blosse Andeutungen zu geben. Um indess nicht zu weitläuftig zu werden, will ich mich hier nur auf Curven in der *Ebene* beschränken.

Der Satz, dessen Beweis ich weiter unten geben werde, ist folgender:

Hauptsatz: Wenn die Lage eines beweglichen Punctes x in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punct und eine Gerade, welche durch Constructionen vermittelst des Lineals aus jenem Puncte x und einer Reihe fester Puncte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (d. h. der Punct in der Geraden liegen soll): so beschreibt der Punct x ein algebraisches Punct-Gebilde, und zwar vom $n$ten Grade, wenn bei jenen Constructionen der bewegliche Punct $n$mal angewandt ist*)."

Wenn man nemlich den Punct x mit einem festen Puncte durch eine Gerade verbindet, so wird man sagen müssen, dass der Punct x zur Construction dieser Geraden einmal angewandt sei: wenn ferner ein Punct als Durchschnitt zweier Geraden erzeugt ist, zu deren Construction der Punct x beziehlich αmal und βmal angewandt ist, so wird man sagen müssen, dass zur Construction dieses Punctes der Punct x $(\alpha+\beta)$-mal angewandt sei: ebenso wenn ein Punct, zu dessen Construction der Punct x αmal, und ein Punct zu dessen Construction er βmal angewandt ist, durch eine Gerade verbunden sind, so wird zu der Construction dieser Geraden der Punct x $(\alpha+\beta)$-mal angewandt sein; und endlich, wenn die Bedingung, durch welche nach dem angeführten Satze die Lage von x beschränkt wird, von der Art ist, dass ein Punct zu dessen Construction x αmal angewandt ist, in einer Geraden liegen soll, zu deren Construction x βmal angewandt ist, so wird man sagen müssen, dass der Punct x im Ganzen $(\alpha+\beta)$-mal angewandt sei, und der Satz sagt aus, dass dann x ein Gebilde $(\alpha+\beta)$ten Grades construire. Es seien z. B. (Fig. 1. Taf. VI.)

*) Ich nenne ein Punctgebilde $n$ten Grades ein solches, welches durch eine Gleichung $n$ten Grades zwischen den Coordinaten des veränderlichen Punctes dargestellt ist. Die Ausdrücke Curve oder Linie $n$ter Ordnung, und selbst der Ausdruck geometrischer Ort $n$ten Grades, lassen nicht diese allgemeine Auffassung zu.

a, c, e feste Puncte, B und D feste Gerade; man verbinde den Durchschnittspunct der beiden Geraden xa und B mit dem Durchschnittspuncte der beiden Geraden xe und D durch eine gerade Linie und setze die Bedingung fest, dass diese gerade Linie durch den Punct c gehen soll, so sieht man, dass bei diesen Constructionen x zweimal angewandt wird, also dass nach dem Satze x ein Gebilde zweiten Grades d. h. einen Kegelschnitt construiren müsste, oder mit andern Worten, dass eine Ecke (x) eines Dreiecks, dessen zwei andere Ecken in festen Geraden B und D, und dessen Seiten um feste Puncte a, c, e sich bewegen, einen Kegelschnitt beschreiben müsste; was bekanntlich der Fall ist. Ich werde den allgemeinen Satz, dessen reciproke Umwandlung sich übrigens leicht von selbst ergiebt, ableiten, ohne eine Kenntniss der in meiner Ausdehnungslehre niedergelegten Resultate vorauszusetzen. Da derselbe jedoch durch die in jener Schrift entwickelte neue Analyse aufgefunden ist und sich eng an sie anschliesst, so werde ich diejenigen Verknüpfungsweisen aus jener Analyse, welche für die Auffassung und Anwendung des Satzes nothwendig scheinen, hier aufführen. Dadurch erreiche ich zugleich den Zweck, die Fruchtbarkeit der Analyse, welche, wie ich hoffen darf, eine durchgängige Umgestaltung der Geometrie und aller auf sie gestützten Wissenschaften (Statik, Mechanik, Optik etc.) herbeiführen wird, an einem einzelnen Beispiele zur Anschauung zu bringen. Das Eigenthümliche jener Analyse ist, dass die räumlichen Gegenstände (Puncte, Linien, Ebenen etc.) nicht bloss vermittels irgend eines Maasses in Zahlen ausgedrückt und ihrer Lage nach durch Coordinaten bestimmt werden, sondern dass die räumlichen Gegenstände selbst zugleich ihrem metrischen Werthe und ihrer Lage nach aufgefasst und so als räumliche Grössen analytischen Verknüpfungen unterworfen werden *). An jeder räumlichen Grösse erscheint dabei ein Zwiefaches: erstens der metrische Werth derselben (die Länge einer Linie, der Flächenraum einer Figur etc.), und zweitens die

---

*) Der Erste, welcher eine ähnliche Idee aufgefasst hat, scheint *Leibnits* gewesen zu sein, welcher (s. *Hugenii aliorumque excercitationes math. et phil. ed. Uylenbroek fasc. II. p.* 6.) die Wichtigkeit einer rein geometrischen Analyse (wie er sie auch nennt) vollkommen erkannte; aber die geometrisch analytische Methode, welche er befolgt, besteht nur darin, dass er unbekannte Puncte als solche bezeichnet, ohne die analytischen Verknüpfungen, welchen diese Puncte unterworfen sind, auszudrücken. Der Erste, welcher wirklich räumliche Grössen analytischen Verknüpfungen unterwarf, war *Möbius*, indem er in seinem barycentrischen Calcul Puncte addiren lehrte. Späterhin hat *Möbius* in seiner Mechanik des Himmels (Leipzig 1843) und in einer Abhandlung in gegenwärtigem Journal (Band XXVIII.) auch die Addition gerader Linien und Ebenen behandelt. Ganz unabhängig von ihm ist die Analyse entstanden, welche ich in meiner Ausdehnungslehre dargelegt habe und von welcher ich hier Proben mittheile; obgleich mich der Gang meiner Untersuchungen zu denselben Additionsweisen geführt hatte.

Stellung derselben im Raume (die Lage der Linie oder Ebene, die Richtung der Linie etc.). Der metrische Werth ist zu dem Begriff der *Grösse* eben so unumgänglich nöthig, wie der der Stellung im Raume zu dem Begriffe der *räumlichen* Grösse. Daher erscheinen die Puncte nur dann als Grössen, wenn an ihnen zugleich gewisse Coëfficienten haften, welche den metrischen Werth darstellen. Diese Coëfficienten, die natürlich auch der Einheit gleich werden können, sind auch für Anwendungen auf die Natur (indem sie Gewichte oder andere Intensitäten darstellen) von wesentlicher Bedeutung. Die Verknüpfungen dieser räumlichen Grössen, wie sie in der neuen Analyse hervortreten, entsprechen nun den algebraischen Verknüpfungen (der Addition, Multiplication, dem Potenziiren und den zugehörigen aufhebenden Verknüpfungsweisen) und unterliegen denselben *allgemeinen* Verknüpfungsgesetzen; zugleich aber gehen sie den geometrischen Constructionen in der Art zur Seite, dass jede geometrische Construction durch eine analytische Verknüpfung ausgedrückt und diese durch jene dargestellt wird. Zu dem hier vorliegenden Zwecke genügt es, den Multiplicationsbegriff aufzustellen, und auch dieser braucht hier nur theilweise und nur ohne Rücksicht auf den besondern metrischen Werth der verknüpften Factoren und des entstehenden Products aufgefasst zu werden. Denn ich werde hier nur solche Gleichungen betrachten, in welchen ein Product räumlicher Grössen gleich Null gesetzt wird; wobei offenbar die besondern metrischen Werthe der einzelnen Factoren und ihrer Producte gleichgültig sind, wenn nur fest steht, ob sie Null sind, oder nicht. Wollte ich jene Beschränkung nicht machen, so würden sich bald die festzustellenden Begriffe so häufen, dass das vorgesteckte Ziel verfehlt werden würde. Ich verstehe, abgesehen von den besondern metrischen Werthen und vorausgesetzt, dass Alles in derselben Ebene liege,

(Def. 1.) 1. unter dem Producte ab zweier verschiedener Puncte a und b die durch sie hindurchgelegte gerade Linie ab;

(Def. 2.) 2. unter dem Producte AB zweier verschiedener gerader Linien A und B ihren Durchschnittspunct *);

(Def. 3.) 3. unter dem Producte Ab oder bA einer Linie A in einen Punct b, der nicht in ihr liegt, verstehe ich einen Flächenraum, welcher,

*) Ich werde in dieser Abhandlung die Puncte mit kleinen lateinischen, die Linien mit grossen lateinischen und die Zahlgrössen im Allgemeinen mit griechischen oder kleinen deutschen Buchstaben bezeichnen; nur die Buchstaben m und n werde ich auch für Zahlgrössen gebrauchen.

mit einer andern Grösse multiplicirt, nur dann Null giebt, wenn diese andere Grösse selbst Null ist *);

und ich setze diese Producte dann, und nur dann Null, wenn die Factoren zusammenliegen, d. h.

(Def. 1.) 1. wenn die Puncte a und b zusammenfallen;

(Def. 2.) 2. wenn die geraden Linien A und B (als unendliche gedacht) zusammenfallen,

(Def. 3.) 3. wenn der Punct b in die Gerade A (diese als unendlich gedacht) fällt; und indem ich diese Producte Null setze, will ich damit zugleich ausdrücken, dass sie, mit irgend einer beliebigen Grösse multiplicirt, das so entstehende Product gleich Null machen **). Die genauere Bestimmung dieser drei Multiplicationsarten, in welcher auch die metrischen Werthe berücksichtigt sind, habe ich in meiner oben angeführten Schrift gegeben und dort zugleich diese Verknüpfungsart auf streng wissenschaftlichem Wege als Multiplicationsarten nachgewiesen. Doch hoffe ich auch, dass die in dieser Abhandlung sich ergebenden Resultate schon hinreichen werden, um die Auffassung jener Verknüpfungsweisen, als multiplicativer, wenigstens zweckmässig erscheinen zu lassen. Da bei den hier zu betrachtenden Producten aus mehreren Factoren, wie ich hernach zeigen werde, die Ordnung der Factoren und die Art, wie sie zu besondern Producten verbunden sind, nicht gleichgültig ist, so halte ich stets fest, dass, wenn die Factoren eines Productes durch keine Klammern zusammengefasst sind, die Multiplication stets von der Linken zur Rechten fortschreiten soll, d. h. also der erste (am weitesten links stehende) Factor mit dem zweiten multiplicirt werden soll, das so gewonnene Product mit dem dritten, und so fort bis zum letzten (am weitesten rechts stehenden) Factor hin. Man betrachte beispielsweise das Product $abCdEf$, so drückt dasselbe eine Linie aus, welche dadurch construirt wird, dass (Fig 2.) der Punct a mit b geradlinicht verbunden wird; der Durchschnitt dieser Verbindungslinie und der Linie C mit dem Puncte d, und der Durchschnitt dieser Verbindungslinie

*) Es stellt nemlich ein solches Product bloss einen metrischen Werth dar; die Besonderheit dieses Werthes ist hier gleichgültig; es kommt nur darauf an, wann ein Product, welches diesen Werth als Factor enthält, Null wird; und in dieser Beziehung verhält sich jener metrische Werth wie eine Zahlgrösse, die nicht Null ist; worin dann die im Texte angegebene Bestimmung liegt.

**) Hierbei ist festzuhalten, dass der Ausdruck $\frac{1}{0}$ nie als Grösse verstanden werden darf, sondern als blosse Gränzform. Hält man dies *nicht* fest, so verschwindet die Allgemeingültigkeit der meisten algebraischen Sätze. Hingegen kann das Imaginäre allerdings als Grösse genommen werden, indem es denselben Verknüpfungsgesetzen unterliegt, wie alle Grössen.

und der Linie E mit dem Puncte f verbunden wird; dann wird die zuletzt gezogene Verbindungslinie durch das Product $abCdEf$ dargestellt. Es leuchtet ein, dass man zwar die zu einer geraden Linie verbundenen Puncte (hier a und b), oder die in einem Puncte sich schneidenden Linien, als Factoren vertauschen kann, ohne das resultirende Gebilde (abgesehen von seinem metrischen Werthe) zu ändern, aber dass man sonst im Allgemeinen keine Vertauschungen vornehmen darf, ohne Aenderung des Ergebnisses: denn wird z. B. C und E vertauscht, so liefert die Construction eine ganz andere Linie; wie man sogleich aus der Figur sieht, in welcher die Construction, durch welche das Product $abEdCf$ erfolgt, durch punctirte Linien angedeutet ist. Bezeichnet x einen beweglichen Punct, X eine bewegliche Gerade, so ist

$$1. \quad Ax = 0 \text{ oder } abx = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, indem sie nach der Definition 3. ausdrückt, dass der Punct x in der geraden Linie A oder ab liegt;

$$2. \quad \ldots\ldots aX = 0 \text{ oder } ABX = 0,$$

ist die Gleichung eines Punctes als eines von der beweglichen Geraden X umhüllten Gebildes, indem sie nach derselben Definition ausdrückt, dass die Gerade X durch den Punct a oder durch den Durchschnitt der geraden Linien A und B geht. Hiernach wird also, sowohl das Punct-Gebilde ersten Grades, als auch das Linien-Gebilde ersten Grades durch eine geometrische Gleichung ersten Grades ausgedrückt. Für die Gebilde, die ein Punct beschreibt, dessen Bewegung auf die in dem oben aufgestellten Satze angegebene Weise beschränkt ist, lässt sich gleichfalls in jedem besondern Falle die Gleichung leicht aufstellen. Denn es sei A_x irgend eine gerade Linie, welche durch lineale Constructionen (d. h. durch Constructionen vermittelt des Lineals) aus x und gewissen festen Puncten und Geraden hervorgeht, und es sei x bei diesen Constructionen α mal angewandt, so wird A_x als ein geometrisches Product erscheinen, in welchem x α mal als Factor vorkommt; und ebenso, wenn b_x ein Punct ist, welcher gleichfalls durch lineale Constructionen aus x und gewissen festen Puncten und Geraden hervorgeht, und x dabei β mal angewandt ist, so wird b_x als geometrisches Product erscheinen, in welchem x β mal als Factor erscheint. Die Bedingung, dass dann der Punct b_x in der Geraden A_x liegen soll, wird dann dargestellt durch die Gleichung

$$3. \quad A_x . b_x = 0,$$

auf deren linker Seite x $(\alpha+\beta)$-mal als Factor vorkommt. Der Satz sagt dann aus, dass das von x construirte Gebilde vom Grade $\alpha+\beta$ ist.

Es bleibt uns somit nur zu beweisen, dass, wenn eine geometrische Gleichung von der Form (3.), als geometrische, vom $n$ten Grade ist, d. h. x $n$mal als Factor darin vorkommt, dann das von ihm construirte Gebilde gleichfalls vom $n$ten Grade ist, d. h. dass dann die algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten von x gleichfalls vom $n$ten Grade sei. Um dies zu beweisen nehme ich zwei feste Richtaxen (Coordinatenaxen) A und B an, gleich viel, ob rechtwinklige oder schiefwinklige, und ein Maass, durch welches die Coordinaten gemessen werden *). Wenn man nun nach diesem Richtsysteme (Coordinatensysteme) die Coordinaten eines Punctes bestimmt und durch das angenommene Maass misst, so nenne ich die Quotienten diesser Messung, nebst der Zahl 1, oder irgend 3 Zahlen, welche diesen dreien proportional sind, die drei Zeiger des Punctes **). Sind nun φ', ψ', 1 in diesem Sinne die Zeiger eines Punctes, so müssen, wenn der Punct in einer festen Geraden liegen soll, die Zeiger, wie bekannt, einer Gleichung von der Form

$$4.\qquad \alpha\varphi' + \beta\psi' + \gamma = 0$$

genügen. Wir nennen hier α, β, γ die Zeiger der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie. Ueberhaupt wird, wenn zwischen φ' und ψ' eine Gleichung $n$ten Grades Statt findet, der Ort des Puncts, dessen Zeiger φ', ψ', 1 sind, ein Gebilde $n$ten Grades sein. Wird $\varphi' = \frac{\varphi}{\chi}$ und $\psi' = \frac{\psi}{\chi}$ gesetzt und die Gleichung mit χ^n multiplicirt, so erhält man eine homogene Gleichung $n$ten Grades zwischen den veränderlichen Zeigern φ, ψ, χ, (welche mit φ', ψ' 1 proportional sind), d. h. eine Gleichung, deren Glieder in Bezug auf diese 3 Veränderlichen alle vom $n$ten Grade sind, und wir können somit und wollen das Punctgebilde $n$ten Grades als ein solches definiren, für welches die Zeiger des construirenden Puncts einer homogenen Gleichung $n$ten Grades genügen. Die Gleichung (4.) geht dann über in

$$5.\qquad \alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi = 0,$$

welche ausdrückt, dass der Punct, dessen Zeiger φ, ψ, χ sind, in der Geraden

---

*) Man kann auf jeder Richtaxe ein eignes Maass annehmen, durch welches die ihr angehörigen Coordinaten gemessen werden; und die den beiden Richtaxen angehörigen Maasse können verschieden sein (s. meine Ausdehnungslehre §. 87. und 88.) Der Einfachheit wegen nehme ich jedoch beide Maasse als gleich an, wie es gewöhnlich geschieht.

**) Wenn man unter Coordinaten bald Linien bald Zahlen (die Quotienten der im Texte angegebenen Messungen) versteht, so kann dies nur Verwirrung hervorbringen, weshalb ich mich gezwungen sah, hier einen neuen Namen (Zeiger) einzuführen; weshalb ich aber 3 Zeiger eines Punctes annehme, dafür ist der Grund in meiner Ausdehnungslehre §. 116 und 117 zu finden.

liegen, deren Zeiger α, β, γ sind. Ebenso können wir als Liniengebilde $n$ten Grades solche Gebilde definiren, für welche die Zeiger der umhüllenden geraden Linie einer homogenen Gleichung $n$ten Grades genügen. So z. B. wird die Gleichung (5.), wenn φ, ψ, χ constant und α, β, γ variabel sind, ein Liniengebilde ersten Grades darstellen, und man sieht, dass dasselbe, wie gehörig, einen von der veränderlichen Linie umhüllten festen Punct darstellt; nämlich den Punct, dessen Zeiger φ, ψ, χ sind. Um nun zu dem Beweise des obigen Satzes zu gelangen, kommt es zunächst darauf an, zwei Aufgaben zu lösen, nämlich die Aufgaben: „aus den Zeigern zweier Puncte, diejenigen der hindurchgelegten geraden Linie" und „aus denen zweier gerader Linien diejenigen ihres Durchschnittspunctes zu finden." Die Zeiger der beiden Puncte in der ersten Aufgabe seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, die gesuchten Zeiger der Verbindungslinie seien α, β, γ: so erhält man aus der Gleichung (5.) die beiden Gleichungen

$$6. \quad \begin{cases} \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma = 0 \text{ und} \\ \mathfrak{a}'\alpha + \mathfrak{b}'\beta + \mathfrak{c}'\gamma = 0, \end{cases}$$

durch welche die Verhältnisse der Zeiger α, β, γ bestimmt sind; nämlich es findet sich

$$7. \quad \alpha : \beta : \gamma = \mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{c}\mathfrak{b}' : \mathfrak{c}\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{c} : \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}.$$

Hiermit ist zugleich die andere Aufgabe gelöset, nämlich: wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Zeiger zweier gerader Linien und α, β, γ die ihres Durchschnittspuncts sind, so findet man genau auf dieselbe Weise für α. β, γ dieselben Ausdrücke (7.). Sind nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ homogene Functionen $m$ten Grades von drei Veränderlichen φ, χ, ψ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ homogene Functionen $n$ten Grades von denselben Veränderlichen, so sieht man, wie die Ausdrücke für α, β, γ in (7.) homogene Functionen $(m+n)$ten Grades von denselben Veränderlichen sind. Daraus folgt, dass, wenn in einem Producte räumlicher Grössen, in welchem nur die beiden ersten Multiplicationsarten vorkommen, nemlich die Multiplication zweier Puncte und die zweier Linien, die Zeiger einer jeden veränderlichen Grösse homogene Functionen dreier Veränderlichen φ, χ, ψ sind, das entstehende Product gleichfalls zu Zeigern homogene Functionen derselben Veränderlichen hat, und dass der Grad dieser Functionen die Summe aus den Graden der einzelnen Functionen ist, welche die Zeiger der in dem Producte vorkommenden Factoren ausmachen. Wenn namentlich nur eine Veränderliche x vorkommt, deren 3 Zeiger φ, χ, ψ selbst sind, so wird ein räumliches Product A_x, welches x αmal als Factor und ausserdem nur constante Factoren enthält, homogene Functionen αten Grades von φ, χ, ψ zu Zeigern haben; und

eben so wird b_x in der Formel 3 homogene Functionen βten Grades von φ, χ, ψ zu Zeigern haben. Dasselbe würde auch gelten, wenn statt des Punctes x eine Gerade X gesetzt würde. Die Bedingung nun, dass der Punct b_x in der Geraden A_x liegen soll, wird, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Zeiger von b_x sind und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die von A_x nach der Gleichung (5.) durch die Gleichung

$$8. \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = 0,$$

dargestellt, und es ist klar, dass wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ homogene Functionen vom Grade α und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ homogene vom Grade β sind, wie wir gezeigt haben: dass dann die Gleichung (8.) eine homogene Gleichung vom Grade $(\alpha+\beta)$ ist, also das dadurch dargestellte Gebilde ein Gebilde vom $(\alpha+\beta)$ ten Grade. Der Grad der Gleichung könnte sich nur dadurch vermindern, dass sämmtliche Coëfficienten Null würden; dann würde derselben durch beliebige Werthe von φ, χ, ψ d. h. durch jeden Punct genügt und somit die Bewegung des Punctes durch die hinzugefügte Bedingung gar nicht beschränkt; was den in dem Satze gemachten Voraussetzung entgegen ist. Damit ist denn der obige Satz bewiesen. Auch sieht man, dass, wenn man statt des Punctes x eine Linie X setzt, in dem Beweise nichts geändert wird; und somit ist der Satz zugleich in seiner reciproken Form bewiesen, in welcher wir ihn hier noch einmal aufstellen wollen; nemlich:

„Wenn die Lage einer beweglichen Geraden X in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punct und eine Gerade, welche durch Constructionen vermittels des Lineals aus jenen Geraden X und einer Reihe fester Puncte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (d. h. der Punct in der Geraden liegen soll): so umhüllt die Gerade X ein algebraisches Liniengebilde, und zwar $n$ten Grades, wenn bei jenen Constructionen die bewegliche Gerade $n$mal angewandt ist."

Dass diese Sätze hier in so bestimmter Form ausgesprochen werden durften, ohne zu solchen, in der Mathematik viel zu häufig angewandten Zugaben wie „im Allgemeinen" u. s. w. Zuflucht zu nehmen, liegt in der allgemeinen Auffassung eines Gebildes $n$ten Grades. Wir hätten jener, alle Wahrheiten in's Unbestimmte zerstreuenden Zugabe bedurft, wenn wir uns der gewöhnlichen Ausdrücke Curve oder Linie $n$ter Ordnung oder Classe, und selbst auch, wenn wir uns des allgemeineren Ausdrucks geometrischer Ort $n$ten Grades hätten bedienen wollen. Unter diesen Ausdrücken ist der der Curve der engste, weil er nicht einmal die gerade Linie umfasst; weiter schon ist der der Linie $n$ter Ordnung, doch umfasst dieser wiederum nicht einzelne Puncte; der letzte Ausdruck geometrischer Ort umfasst zwar beides, auch

wird der Verein zweier Linien $m$ter und $n$ter Ordnung (wenn sie nicht ganz oder theilweise zusammenfallen) als geometrischer Ort $(m+n)$ter Ordnung aufgefasst werden können: aber dennoch giebt es Gebilde $n$ten Grades, welche als geometrische Oerter von niederen Graden sind. Dies wird nemlich dann der Fall sein, wenn die gleich Null gesetzte Function $n$ten Grades, durch welche das Gebilde $n$ten Grades dargestellt ist, sich in Factoren zerlegen lässt, welche wieder ganze rationale Functionen sind, und von welchen zwei oder mehrere einander gleich sind. Setzt man dann diese einander gleichen Factoren Null, so wird dadurch offenbar der gegebenen Gleichung genügt, und von den Partialgebilden, in welche das ganze Gebilde zerfällt, fallen also zwei oder mehrere zusammen. Will man nun aber nur den geometrischen Ort des veränderlichen Punctes haben, so hat man jenes Partialgebilde nur einmal zu setzen, wodurch sich der Grad des geometrischen Ortes verringert.

Ich will nun einige specielle Fälle des allgemeinen Satzes hervorheben, um ihn der Anschauung näher zu bringen und um zugleich bestimmter darauf hinweisen zu können, wie auf ihm eine allgemeine Curventheorie aufgebaut werden kann. Doch will ich mich nur auf Punctgebilde beschränken, indem die Uebertragung auf Liniengebilde zu sehr auf der Hand liegt, als dass ich sie hier auszuführen nöthig hätte.

Ich habe schon oben gezeigt, wie aus jenem Satze hervorgeht, dass, wenn die Seiten einss Dreiecks um 3 feste Puncte a, c, e sich drehen und zwei Ecken desselben sich in festen Geraden B, D bewegen, dann die dritte x einen Kegelschnitt construirt, (Fig. 1.). Die Bedingung, durch welche hier die Bewegung beschränkt ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass die Gerade $axBcDx$ durch den Punct e gehen soll; die Gleichung des Kegelschnittes ist daher

$$9. \qquad axBcDxe = 0 \text{ oder auch } exDcBxa = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Kegelschnitte folgende 5 Puncte liegen: a, e, BD, acD, ecB: denn fällt x in a, so wird ax Null (Def. 1.), also auch das ganze Product Null, also wird der Gleichung genügt, d. h. a ist ein Punct des Kegelschnitts, und aus demselben Grunde e, ferner auch BD d. h. (Def. 2.) der Durchschnitt der Geraden B und D; denn es sei k dieser Durchschnittspunct, so fällt $akBcD$ wieder in k zurück, und da kk Null ist, so wird, wenn in (9.) k statt x gesetzt wird, $akBcDk$ gleich Null, also auch das ganze Product Null, mithin ist k ein Punct des Kegelschnitts. Ferner ist ist auch acD, was gleich d gesetzt werde (Fig. 3.), ein Punct des Kegelschnitts; denn es fällt $adBcD$ zurück in d, also ist $adBcDd$ Null, folglich auch $adBcDde$,

d. h. d ist ein Punct des Kegelschnitts, und endlich aus demselben Grunde auch ecB, was gleich b gesetzt werde; denn es fällt wieder $ebDcB$ in b, also ist $ebDcBb$ Null, also auch $ebDcBba$ Null, d. h. b ist ein Punct des Kegelschnitts. Da nun durch diese 5 Puncte (Fig. 3.) leicht die 5 in der Gleichung (9.) vorkommenden Constanten ausgedrückt werden können, indem B durch bk, D durch dk, c durch $(ad)(be)$ ausgedrückt werden kann, so hat man zugleich die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher durch 5 gegebene Puncte gehen soll, nemlich

$$10. \qquad ax\,(bk)\,[(ad)(be)]\,(dk)\,xe = 0.$$

Wir können den obigen Satz für Kegelschnitte noch erweitern, indem wir sagen:

„Wenn die sämmtlichen Seiten eines n-Ecks um feste Puncte sich drehen und $(n-1)$ Ecken in festen Geraden sich bewegen, so beschreibt die $n$te Ecke (x) einen Kegelschnitt."

Denn stellt man sich die festen Puncte und Geraden gegeben vor, und den Punct x in irgend einer Lage, so ergeben sich dadurch nicht nur die Seiten und Ecken des n-Ecks der Reihe nach durch blosses Ziehen von geraden Linien, sondern es tritt auch, wenn x in der That eine Ecke desselben sein soll, die Bedingung hinzu, dass die letzte, durch jene Construction erfolgende Seite des n-Ecks wieder durch x gehen muss; und da bei diesen Constructionen x zweimal angewandt ist, so folgt, dass x ein Gebilde zweiten Grades, d. h. einen Kegelschnitt construirt. Es seien, um dies noch mehr zu veranschaulichen, $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ die festen Puncte, um welche sich der Reihe nach von der Ecke x aus, etwa nach rechts herum gerechnet, die Seiten des n-Ecks drehen (Fig. 4., wo $n = 4$ angenommen ist), und $B_1, B_2, \ldots\ldots B_{n-1}$ seien die festen Geraden, in welchen sich ebenfalls von x aus in derselben Reihenfolge genommen die übrigen Ecken ausser x bewegen: so wird die Gleichung des Kegelschnitts

$$11. \qquad x a_1 B_1 a_2 B_2 \ldots\ldots a_{n-1} B_{n-1} a_n x = 0,$$

z. B. wenn $n = 4$ ist zu

$$12. \qquad x a_1 B_1 a_2 B_2 a_3 B_3 a_4 x = 0.$$

Um die folgenden Specialsätze noch unmittelbarer aus dem Hauptsatze ableiten zu können, will ich denselben noch zuvor in einer etwas andern Form darstellen, nemlich wie folgt:

„Wenn in einem gleich Null gesetzten Producte räumlicher Grössen derselben Ebene nur eine veränderliche Grösse als Factor vorkommt, und zwar diese $n$mal und alle übrigen multiplicativen Verknüpfungen, welche in dem

Producte vorkommen, ausser der letzten *) zu den beiden ersten Arten (Def. 1. und 2.) gehören, die letzte aber zu der dritten Art (Def. 3.) gehört: so beschreibt die veränderliche Grösse (wenn sie nicht etwa in jeder Lage das Product zu Null machen sollte **) ein bestimmtes Gebilde $n$ten Grades."

Ich gehe nun zu den Gebilden vom dritten Grade über. Wenn ein Punct x der Gleichung

$$13. \qquad axBcDxD_1c_1B_1xa_1 = 0$$

unterliegt, so beschreibt er nach dem angeführten Satze ein Gebilde dritten Grades d. h. (Fig. 6.):

„Wenn die Winkel an der Spitze zweier Dreiecke stetig an einem Puncte x liegen und die Grundseiten, wie auch die äussersten Schenkel, um feste Puncte c, c_1, a, a_1 sich drehen, die Endpuncte der Grundseiten aber in festen Geraden B, D, B_1, D_1 sich bewegen: so beschreibt die gemeinschaftliche Spitze x ein Gebilde vom dritten Grade."

Man kann, wie leicht zu sehen, den Satz zu folgendem Satze verallgemeinern:

„Wenn zwei veränderliche Vielecke eine Ecke x und eine an dieser Ecke liegende Seite ***) gemeinschaftlich behalten, während die übrigen Ecken in festen Geraden und die übrigen Seiten um feste Puncte sich bewegen: so beschreibt die gemeinschaftliche Ecke ein Punctgebilde dritten Grades, und die gemeinschaftliche Seite ein Liniengebilde dritten Grades."

Der Anblick von Figur 7 genügt, um diesen Satz auf den allgemeinen zurückführen zu können. Es ist hier für die Theorie der Curven dritten Grades von der grössten Wichtigkeit, zu zeigen, dass schon durch die in der

---

*) Es muss nemlich, nach der Art, wie wir das Product schreiben, stets eine bestimmte multiplicative Verknüpfung als die letzte, das ganze Product bildende erscheinen.

**) Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn ein Punct x mit den 3 Ecken a, b, c eines Dreiecks verbunden wird und die Puncte, worin diese 3 Verbindungslinien die gegenüberliegenden Seiten A, B, C schneiden, paarweise verbunden werden, und wenn dann die Bedingung hinzugefügt wird, dass die 3 Puncte, in welcher diese 3 letzten Verbindungslinien die jedesmalige dritte Seite schneiden, in gerader Linie liegen sollen; denn dieser Bedingung wird bekanntlich für jeden Punct x genügt (Fig. 5.). Die Gleichung würde dann

$$[xaA(xbB)C]\,[xbB(xcC)A]\,[xcC(xaA)B] = 0$$

sein, welche den Punct x somit ganz unbestimmt lässt, obgleich sie beim ersten Anblick ein bestimmtes Gebilde 6ten Grades zu liefern scheint. Bei einer ausgeführten Curventheorie würden solche Fälle eine besondere Beachtung verdienen. Um jedoch durch solche Fälle nicht beschränkt zu werden, wollen wir dann das Gebilde ein $n$ten Grades nennen.

***) Wir sagen, dass zwei Figuren eine Seite gemeinschaftlich haben, wenn eine Seite der einen mit einer Seite der andern in derselben geraden Linie liegt.

Formel (13.) gegebene Gleichung und durch die darauf gegründete Construction vermittels der gemeinschaftlichen Spitze zweier stetig zusammenliegender Dreiecke *jedes* Punctgebilde dritten Grades erzeugt werden kann; auch dann noch, wenn man in (13.) B und B_1 zusammenfallen lässt; was ich nun beweisen will. Die in Fig. 6. dargestellte Construction geht dann über in die von Fig. 8.

Noch ist ehe wir zur Discussion übergehen, zu bemerken, dass man die Formel (13.) umkehren kann, ohne ihre Bedeutung zu ändern, wie man sogleich aus der Figur (Fig. 6. oder 8.) ersieht; sie ist also

(13.) $\quad axBcDxD_1c_1B_1xa_1=0$, oder

(13.*) $\quad a_1xB_1c_1D_1xDcBxa=0$,

wo man dann auch B statt B_1 setzen kann, da wir annehmen (Fig. 8.), dass beide zusammenfallen. Es lassen sich nun leicht 9 Puncte der erzeugten Curve finden. Erstens sind a und a_1 Puncte der Curve, weil, wenn x gleich a oder a_1 wird, nach Formel (13.) oder (13.*) schon die erste Multiplication Null giebt. Zweitens sind BD und B_1D_1 Puncte der Curve, die wir mit k und k_1 bezeichnen; denn setzt man in (13.) statt x den Punct k, so giebt, wie man sogleich durch die ausgeführte Construction sieht, akB wieder den Punct k und kcD giebt gleichfalls den Punct k; also ist $akBcDk$ Null, folglich wird auch der ganze linksstehende Ausdruck in (13.) zu Null, wenn man k statt x setzt, d. h. k genügt, statt x gesetzt, jener Gleichung (13.), oder ist ein Punct der Curve. Eben so ergiebt sich aus (13*) k_1 als Punct der Curve. Drittens sind acD und $a_1c_1D_1$ Puncte der Curve, die wir mit d und d_1 bezeichnen. Denn setzt man in (13.) d statt x (Fig. 9.), so fällt $adBcD$ wieder in d zurück, also ist $adBcDd$ schon Null, und d wird somit ein Punct der Curve sein; ebenso d_1 vermöge (13.*). Viertens sind nun in D und D_1 noch leicht die dritten Puncte zu finden, in welchen sie die Curven schneiden; die wir e und e_1 nennen wollen. Es sei x ein Punct in D, aber weder k noch d, so wird, da $axBcD$ stets ein Punct in D ist und zugleich x in D liegt, $axBcDx$ wieder die Linie D darstellen, und die Gleichung (13) sagt dann aus, dass der Ausdruck DD_1cBxa, Null sein, d. h. DD_1cB mit x und a_1 in gerader Linie liegen muss, also wird x in der Linie DD_1cBa_1, aber nach der Voraussetzung auch in D liegen: es ist also x, was wir in diesem Falle durch e bezeichneten, gleich DD_1cBa_1D, und aus demselben Grunde wird $D_1Dc_1B_1aD_1$ ein Punct (e_1) der Curve sein. Endlich lässt sich zu den beiden Puncten k und k_1 der dritte Punct in B oder B_1, vorausgesetzt, dass

diese beide Linien zusammenfallen, leicht finden. Nemlich, liegt x in B, ohne in k oder k_1 zu fallen, so fällt axB wieder in x zurück, $xcDxD_1c_1$ giebt die Linie cc_1 und die Gleichung (13) reducirt sich auf $cc_1Bxa_1 = 0$, d. h. der Punct cc_1B liegt mit den Puncten x und a_1 in gerader Linie; was, da x in B liegt, nur möglich ist, wenn x in cc_1B fällt *); wir bezeichnen diesen Punct cc_1B mit f. Es liesse sich nun schon leicht zeigen, dass man in jeder Curve dritten Grades 9 solche Puncte annehmen kann, wie sie sich durch obige Constructionen ergeben haben; doch der grössern Einfachheit wegen will ich noch annehmen, dass die Puncte k und e, und ebenso k_1 und e_1 (Fig. 9.), zusammenfallen, wodurch also die Linien D und D_1 Tangenten werden, welche die Curve in e und e_1 berühren. Fällt nun zuerst e in k, so sieht man aus Fig. 9. sogleich, dass auch gleichzeitig c_1 in D fällt, und ebenso wird c in D_1 fallen, wenn e_1 in k_1 fällt. Fig. 9. geht somit in Fig. 10. über. Hieraus folgt nun sogleich, dass jede Curve dritter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (13) dargestellt werden kann. Denn es sei eine Curve dritter Ordnung, oder überhaupt ein Punctgebilde dritten Grades gegeben. Man ziehe an zwei Puncten e und e_1 der Curve die Tangenten D und D_1, welche die Curve noch jede in einem Puncte schneiden müssen; diese Puncte seien d und d_1; sodann verbinde man die Berührungspuncte e und e_1 durch eine Gerade B, welche die Curve noch in einem Puncte schneiden muss; dieser sei f. Dann ziehe man von f eine willkührliche gerade Linie, welche die Tangenten D und D_1 in den Puncten c_1 und c schneide, ziehe dann die Geraden c_1d_1 und cd, deren jede die Curve im Allgemeinen noch in 2 Puncten schneiden wird; einen der Puncte, worin c_1d_1 sie schneidet, nenne man a_1, einen der Puncte, worin cd sie schneidet nenne man a: so hat man nun 9 Puncte (in e und e_1 fallen jedesmal zwei zusammen), durch welche die Curve dritten Grades im Allgemeinen bestimmt ist. Die Curve dritten Grades kann bekanntlich durch 9 Puncte, von denen 6 auf zwei geraden Linien liegen, nur dann nicht bestimmt sein, wenn die übrigen drei Puncte, hier a, a_1, f, nicht in gerader Linie liegen. Nun kann man aber von jenen 4 neuen Puncten, in welchen die beiden zuletzt gezogenen geraden Linien die Curve schneiden, da sie doch nicht alle 4 in gerader Linie liegen können, stets wenigstens zwei a und a_1 so auswählen, dass sie mit f nicht in gerader Linie liegen; dann hat man also stets 9 Puncte, durch

*) Vorausgesetzt nemlich, dass a nicht in BB_1 liegt; in diesem Falle wäre x unbestimmt, die Linie B wäre dann selbst ein Theil des Gebildes dritten Grades.

welche die Curve vollkommen bestimmt ist. Da nun das Gebilde dritten Grades

$$13. \qquad axBcDxD_1c_1Bxa_1 = 0$$

jene 9 Puncte mit der gegebenen Curve gemeinschaftlich hat, so fallen beide zusammen. Also kann jede Curve dritter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (13) dargestellt, oder durch die gemeinschaftliche Ecke zweier Dreiecke erzeugt werden, welche ausserdem noch eine an dieser Ecke liegende Seite (als unendliche Linie gedacht) gemeinschaftlich haben, und deren andere Ecken in festen Geraden, und deren andere Seiten um feste Puncte sich bewegen. Geht man also von dieser allgemeinen Eigenschaft der Punctgebilde dritten Grades aus, welche auch als Definition der Gebilde dritten Grades gebraucht werden kann, so sieht man, wie diese Gebilde sich einer reingeometrischen Behandlung fügen; ja man sieht, wie sich leicht mechanische Vorrichtungen ersinnen lassen, durch welche ein Punct gezwungen wird, irgend ein beliebiges Punctgebilde dritten Grades zu beschreiben. Um zunächst noch bei den Gebilden dritten Grades stehen zu bleiben, will ich einige andere Erzeugungsarten derselben aus dem Hauptsatze ableiten. Da die Gleichung

$$14. \qquad (xaA)(xbB)(xcC) = 0$$

ein Gebilde dritten Grades liefert, so folgt (Fig. 11.)

„Wenn drei von einem beweglichen Puncte x ausgehende Strahlen sich um drei feste Puncte a, b, c drehen und die Puncte in welchen diese Strahlen von einer beweglichen geraden Linie (X) getroffen werden in drei Geraden A, B, C sich bewegen, so beschreibt der Punct x ein Punctgebilde dritten Grades, und die gerade Linie X ein Liniengebilde dritten Grades."

Das letztere folgt aus der Gleichung

$$14.^* \qquad (XAa)(XBb)(xCc) = 0$$

Es ergeben sich leicht folgende 9 Puncte als Puncte jenes Punctgebildes dritten Grades: a, b, c; AB, BC, CA; abC, bcA, caB, wovon man sich leicht durch Construction überzeugt. Fügt man in (14.) oder (14.*) den beiden ersten in Klammer geschlossenen Factoren noch paarweise beliebige Puncte und Gerade abwechselnd als Factoren hinzu, so dass z. B. aus xaA wird $xaAa_1A_1 \ldots . a_mA_m$, so gelangt man zu folgendem allgemeineren Satze:

„Zieht man von irgend einer Ecke x eines veränderlichen n-Ecks eine Linie nach irgend einer Seite X desselben, und nimmt an, dass alle übrigen Ecken in festen Geraden, und alle übrigen Seiten desselben um feste Puncte sich bewegen, während zugleich die von der Ecke x nach der Seite X gezogene

Gerade um einen festen Punct sich dreht, und der Punct, worin sie die Seite X trifft, in einer festen Geraden sich bewegt, so beschreibt der Punct x ein Punct-, die Linie X ein Liniengebilde dritten Grades."

Ferner da die Gleichung

$$15. \qquad (xaAa_1)(xbBb_1)xc = 0$$

ein Gebilde dritten Grades liefert, so folgt (Fig. 12.)

„Wenn die 4 Seiten und eine Diagonale eines Vierecks sich um feste Puncte drehen, und die beiden Ecken, welche nicht von der Diagonale getroffen werden, in festen Geraden sich bewegen, so beschreiben die von der Diagonale getroffenen Ecken jede ein Punctgebilde dritten Grades."

Fügt man in (15.) den beiden ersten Factoren noch paarweise beliebige Gerade und Puncte abwechselnd als Factoren hinzu, so dass z. B. aus $xaAa_1$ wird $xaAa_1A_1a_2 \ldots . A_{m-1}a_m$, so gelangt man zu dem allgemeineren Satze:

„Wenn die n Seiten und eine Diagonale eines veränderlichen n-Ecks sich um feste Puncte drehen, und die von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden sich bewegen, so beschreibt jede von den beiden Ecken, die von der Diagonale getroffen werden, ein Punctgebilde dritten Grades."

Da endlich die Gleichung

$$16. \qquad xaAbCd(xa)b_1C_1d_1x = 0$$

ein Gebilde dritten Grades liefert, so folgt (Fig. 13.)

„Wenn die Grundseiten zweier veränderlichen Dreiecke fortdauernd in gerader Linie stetig aneinander liegen d. h. so liegen, dass, wo die eine aufhört, die andere anfängt, und wenn zugleich die Seiten um feste Puncte a, b, d, b_1, d_1 sich drehen, die Spitzen aber, und der nicht gemeinschaftliche Endpunct einer Grundseite in festen Geraden C, C_1, A sich bewegen, so beschreibt der nicht gemeinschaftliche Endpunct der andern Grundseite ein Punctgebilde dritten Grades, welches in demjenigen festen Puncte a, um welchen sich die gemeinschaftliche Grundlinie dreht, einen Doppelpunct hat." Letzteres folgt leicht, wenn man durch a eine beliebige Gerade D zieht und in ihr einen Punct a_1 setzt, den man in (16) statt des zweiten Factors a einführt, wodurch dann (16) übergeht in

$$16.^* \qquad xaAbCd(xa_1)b_1C_1d_1x = 0.$$

Denn nimmt man nun an, dass der Punct a_1 sich dem Puncte a nähert, während er immer in der Geraden D bleibt, so nähert sich das durch (16.*) dargestellte Gebilde f dem durch (16.) dargestellten, während a und a_1 stets Durchschnittspuncte dieses Gebildes mit der Geraden D bleiben. In dem

Augenblicke, wo a_1 in a fällt, fallen somit zwei der Durchschnittspuncte der Geraden D und der Curve (16.) in a zusammen, und zwar geschieht dies, welche Richtung auch D haben mag, was die Idee des Doppelpunctes ist. Es leuchtet ein, dass man diesen Satz durch Hinzufügen von Factoren zu (16.) verallgemeinern kann, wodurch dann die Dreiecke in Vielecke übergehen. Für die Gebilde höherer Grade will ich nur noch ein Paar Sätze hinzufügen, indem ich durch die Behandlung der Gebilde dritten Grades schon glaube den Weg der Behandlung bezeichnet zu haben, welcher die Gebilde höherer Gerade zu unterwerfen sein möchten. Da die Gleichung

$$17. \qquad axBcDxB_1c_1D_1xB_2c_2D_2\ldots\ldots ex = 0,$$

wenn x darin $n$mal vorkommt, ein Punctgebilde $n$ten Grades darstellt, so folgt der Satz (vergl. Fig. 6.)

„Wenn n veränderliche Dreiecke fortdauernd eine gemeinschaftliche Spitze x haben, und ihre Winkel an der Spitze stetig aneinanderliegen, während die übrigen Ecken in geraden Linien fortschreiten, die Grundseiten aber und diejenigen zwei Schenkel der Winkel an der Spitze, welche nicht zweien dieser Winkel gemeinschaftlich sind, um feste Puncte sich drehen, so beschreibt die Spitze x ein Punctgebilde $(n+1)$ten Grades."

Man kann den Satz noch allgemeiner fassen, indem man statt der n Dreieke n Vielecke setzt, welche eine gemeinschaftliche Ecke haben, und deren an dieser Ecke befindliche Polygonwinkel stetig aneinanderliegen, während alle übrigen Ecken in geraden Linien fortschreiten; und alle Seiten ausser denen, welche in den gemeinschaftlichen Schenkeln der stetigeo Winkel liegen, um feste Puncte sich drehen; denn auch dann wird jene gemeinsehaftliche Ecke ein Punctgebilde $(n+1)$ten Grades beschreiben. Da ferner die Gleichung

$$18. \qquad xaAbCd(xa)b_1C_1d_1(xa)b_2C_2d_2\ldots\ldots ex = 0,$$

wenn x darin $(n+1)$mal vorkommt, ein Punctgebilde $(n+1)$ten Grades liefert, und der Punct a darin $n$mal als Punct dieses Gebildes erscheint, so ergiebt sich (vergl. Fig. 13.) der Satz;

„Wenn die Grundseiten von n veränderlichen Dreiecken fortdauernd in gerader Linie stetig an einander liegen, während die sämmtlichen Seiten um feste Puncte sich drehen, die Spitzen aber und eine von denjenigen zwei in der Grundlinie liegenden Ecken, welche nicht zwei Dreiecken gemeinschaftlich sind, in festen geraden Linien sich bewegen, so beschreibt die andere dieser Ecken ein Punctgebilde $(n+1)$ten Grades, welches in dem festen Puncte a, um welche sich die Grundlinie dreht, einen $n$fachen Punct hat."

Dass der Punct a ein $n$facher ist, folgt leicht. Denn zieht man durch a eine beliebige gerade Linie E und setzt in ihr ausser a noch $(n-1)$ feste Puncte $a_1 \dots a_{n-1}$, welche man nach der Reihe in (18) statt der n Factoren a setzt, so dass man also erhält

$$18.^* \qquad x\,a\,A\,b\,C\,d\,(x\,a_1)\,b_1\,C_1\,d_1\,(x\,a_2)\,b_2\,C_2\,d_2 \dots e\,x = 0,$$

so werden die nPuncte $a, a_1, \dots a_{n-1}$ Puncte des durch die Gleichung (18.*) dargestellten Gebildes $(n+1)$ten Grades und da sie zugleich in der Geraden E liegen, so bilden sie nDurchschnittspuncte dieser Geraden und jenes Gebildes. Rücken nun in (18.*) die Puncte $a \dots a_n$, ohne die Gerade E zu verlassen, in einen Punct a zusammen, so geht (18.*) in (18.) über, und in der Geraden E fallen nDurchschnittspuncte derselben mit der Curve in einen Punct a zusammen, und zwar geschieht dies, wie auch die Gerade E angenommen werden mag d. h. der Punct a ist ein $n$facher Punct. Die Gleichung (18.) ist zugleich dadurch interessant, dass sie unmittelbar die projectivische Erzeugung der Punctgebilde $n$ten Grades, welche einen $(n-1)$-fachen Punct haben, vor Augen stellt. Denn denkt man sich den Punct x in verschiedenen Lagen, so erscheinen überall um die festen Puncte Strahlenbüschel und in den festen Geraden Puncte, und setzt man diejenigen Strahlen dieser Büschel und diejenigen Puncte dieser Geraden, welche aus derselben Lage des Punctes x hervorgehen, als entsprechende, so erscheint jeder Punct x der Curve als Durchschnitt zweier entsprechender Strahlen (z. B. Fig. 13.) und die ganze Curve erscheint also als Durchschnitt zweier Strahlenbüschel, und es erhellt unmittelbar aus der Figur, wie man zu jedem Strahle (ax), welcher dem um den $(n-1)$-fachen Puncte (a) liegenden Strahlenbüschel angehört, den entsprechenden Punct (x) der Curve durch das Ziehen von wenigen $[2(n-1)]$ geraden Linien findet. Hingegen tritt in dem allgemeinen Falle nicht mehr die projectivische Erzeugung hervor, indem im Allgemeinen in x mehr als 2 Strahlen zusammenlaufen. Jedoch giebt es ausser den Curven $n$ten Grades mit $(n-1)$-fachem Puncte noch andere, welche sich durch blosse Constructionen vermittels des Lineals, oder, was dasselbe ist, durch projectivische Erzeugung darstellen lassen. Um dies vollständiger darzulegen, will ich hier den allgemeinen Satz für die projectivische Erzeugung der Curven ableiten. Jede Construction eines Punctgebildes *) vermittels des Lineals allein kann nur, wie man leicht

*) Ich werde mich hier nur auf Punctgebilde beschränken, indem die Sätze für Liniengebilde aus den entsprechenden für Punctgebilde unmittelbar abgelesen werden können.

sieht, auf die Weise erfolgen, dass man entweder in einer Geraden einen beweglichen Punct oder um einen Punct eine bewegliche Gerade annimmt, und aus jenem beweglichen Punct oder dieser beweglichen Geraden und aus festen Puncten und Geraden durch lineale Constructionen den Punct herleitet, welcher die Curve erzeugt. In dem obigen Falle z. B. der projectivischen Erzeugung von Punctgebilden $n$ten Grades mit $(n-1)$-fachem Puncte war es die um den $(n-1)$-fachen Punct a sich drehende Gerade ax, welche der projectivischen Erzeugung der Curve zu Grunde lag. Lege ich nun überhaupt zunächst eine um einen festen Punct a sich drehende Gerade (P) der Erzeugung zu Grunde und nehme diesen Punct als Durchschnitt der Coordinatenaxen an, so wird, wenn φ' und ψ' die durch irgend ein Maass gemessenen Coordinaten eines Punctes jener Geraden P sind, die Gleichung dieser Geraden von der Form $\alpha\varphi' + \beta\psi' = 0$ sein, und es sind somit nach der an Formel (4) sich anschliessenden Erklärung α, β die Zeiger der Geraden. indem der dritte Zeiger Null ist. Diese Zeiger α, β sind aber, wenn die Gerade P beweglich ist, als Veränderliche zu setzen, wir wollen $\frac{\beta}{\alpha}$ mit v bezeichnen. Nun haben wir gezeigt, dass jeder Punct x, welcher durch lineale Constructionen aus der beweglichen Geraden P und aus festen Puncten und Geraden hervorgeht, wenn bei diesen Constructionen P $n$mal angewandt ist, zu Zeigern homogene Functionen $n$ten Grades von den Zeigern der Geraden P hat, also hier von α und β, oder indem man mit α^n dividirt Functionen von v, welche im Allgemeinen vom $n$ten Grade sind, und nur dann von einem anderen und zwar niederem Grade sind, wenn α in allen Gliedern jener Functionen enthalten ist. Ebenso verhält es sich, wenn wir einen Punct zu Grunde legen, welcher sich in einer der Coordinatenaxen bewegt, indem auch für ihn der dritte Zeiger Null ist; nennen wir dann α und β die Zeiger desselben, und setzen $\frac{\beta}{\alpha} = v$, so gelangen wir auf dieselbe Weise und aus denselben Gründen zu demselben Resultate, wie vorher. Nun hat *Möbius* in seinem barycentrischen Calcul (§. 136 und §. 137.) dargethan, dass, wenn die 3 Zeiger eines veränderlichen Punctes sich als ganze rationale Functionen $n$ten Grades einer Hülfsgrösse v darstellen lassen, dann der Punct eine algebraische Curve beschreibt, deren Ordnungszahl im Allgemeinen n ist, und nie diese Zahl n übersteigt, dass aber (§. 138.) diese Curven nicht die allgemeinen Curven $n$ter Ordnung sind, sondern vielmehr (§. 70.) schon durch $3n-1$

Puncte bestimmt sind, also von der dritten Ordnung an (s. o.) von einer geringeren Anzahl von Puncten, als die allgemeinen Curven derselben Ordnung. Nehmen wir diese Resultate hier auf, so gelangen wir zu dem Satze:

„Wenn ein Punct (p) sich in einer festen Geraden bewegt oder eine Gerade P sich um einen festen Punct dreht, und man durch lineale Constructionen aus diesem Puncte oder dieser Geraden und einer Reihe fester Puncte und Geraden einen (gleichfalls beweglichen) Punct x construirt, so beschreibt der Punct x ein algebraisches Punctgebilde, welches, wenn p oder P bei jenen Constructionen $n$mal angewandt ist, im Allgemeinen vom $n$ten und nie von einem höheren Grade ist; und zwar sind die so construirbaren Gebilde $n$ten Grades, vom dritten Grade an, besondere Gattungen der Gebilde $n$ten Grades, indem sie im Allgemeinen durch $(3n-1)$ Puncte bestimmt sind."

Setzt man die aus demselben Puncte p construirten Strahlen und Puncte bis zu x hin als entsprechende, so erhält man Strahlenbüschel und mit Puncten besetzte Gerade, welche sich einander entsprechen, und von denen immer zwei nach einander entstehende so liegen, dass die Puncte in den entsprechenden Strahlen liegen, und welche also als perspectivische Gebilde aufgefasst werden können. Das Gebilde $n$ten Grades wird dann schliesslich durch das gegenseitige Durchschneiden der entsprechenden Strahlen zweier Strahlenbüschel erzeugt (Vergl. z. B. Fig. 13.). Somit drückt zugleich dieser Satz die allgemeine projectivische Erzeugbarkeit der Curven aus.

Ich will hier noch zum Schlusse zwei Bemerkungen hinzufügen, nämlich erstens, dass es ausser der hier angeregten geometrischen Behandlungsweise der Curven, bei welcher nur auf das Ziehen von geraden Linien zurückgegangen ist, noch eine andere giebt, welche zugleich auf den Kreis zurückgeht. Schon bei den Kegelschnitten tritt diese verschiedene Behandlungsweise hervor, indem die Eigenschaft des mystischen Sechseckes, oder, was dasselbe ist, die Construction eines Kegelschnittes durch eine Ecke eines Dreiecks, dessen beide anderen Ecken in festen Geraden, und dessen Seiten um feste Puncte sich bewegen, die rein lineale Behandlung der Kegelschnitte bedingt, während die Erzeugung eines Kegelschnittes als Durchschnitt einer Ebene und eines Kegels auf den Kreis zurückführt. Diese zweite Behandlungsweise der Curven will ich jedoch bis zum Erscheinen des zweiten Theiles meiner Ausdehnungslehre verschieben, indem in dem ersten Theile, welcher die lineale

Ausdehnungslehre enthält, die Principien nur für die lineale Behandlungsweise der Curven sich vorfinden.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf eine neue Stufe der Verallgemeinerung, indem man nämlich statt der festen Puncte und Geraden Gebilde höherer Grade setzt, und zwar statt der festen Puncte Liniengebilde und statt der festen Geraden Punctgebilde, und dann statt des Durchschnitts einer durch Construction gewonnenen (beweglichen) Geraden mit einer gegebenen festen Geraden die Durchschnittspuncte der ersteren mit dem statt der letzteren eingeführten Punctgebilde setzt und statt der Verbindungslinie zwischen einem durch Construction gewonnenen (beweglichen) Puncte und einem gegebenen festen Puncte die Tangenten setzt, welche von dem ersteren an das statt des letzteren eingeführte Liniengebilde gezogen werden können. Führt man statt einer solchen festen Geraden, welche nur einmal bei der Construction angewandt wird, (oder statt eines solchen festen Punctes) ein Punctgebilde (oder ein Liniengebilde) $m$ten Grades ein, so lässt sich leicht beweisen, dass dadurch der Grad des nach dem Hauptsatze erzeugten Gebildes ver$m$facht wird, d. h. wenn der Grad des erzeugten Gebildes ursprünglich n betrug, so beträgt dieselbe, nachdem statt einer festen Geraden, welche einmal bei der Construction angewandt wurde, (oder statt eines solchen festen Punctes) ein Punctgebilde (oder ein Liniengebilde) $m$ten Grades eingeführt wird, nach dieser Finführung $n.m$. Doch will ich den Gang des Beweises nur andeuten. Es lässt sich jede den Hauptsatz auf besondere Weise darstellende Gleichung, wenn die feste Gerade A darin einmal vorkommt, stets sehr leicht auf die Form bringen.

$$p_x A = 0,$$

welche ausdrückt, dass der Punct p_x in der Geraden A liegt, und welche, wenn p_x vom $n$ten Grade ist, ein Punctgebilde $n$ten Grades darstellt. Wird nun statt A ein Punctgebildes $m$ten Grades gesetzt, so heisst das, es soll der Punct p_x in diesem Punctgebilde liegen. Es sei nun dies Punctgebilde $m$ten Grades, welches statt A gesetzt werden soll, ausgedrückt durch eine geometrische Gleichung von der Form, wie sie dem Hauptsatze genügt, in welcher also der dies Gebilde construirende Punct y $m$mal als Factor vorkommt; setzt man dann statt y den Punct p_x, so ist dadurch der Bedingung genügt, dass p_x in diesem Gebilde $m$ten Grades liegen soll. Da dann p_x $m$mal als Factor erscheint, p_x selbst aber x $n$mal als Factor enthält, so wird in der resultirenden Gleichung x im Ganzen $(n.m)$mal als Factor erscheinen,

also der Punct x ein Punctgebilde $(n.m)$ten Grades beschreiben. Es liegt am Tage, wie man auf diese Weise statt beliebig vieler fester Geraden nach und nach solche Punctgebilde, und statt der festen Puncte nach und nach solche Liniengebilde einführen, und dadurch den Satz in seiner allgemeinsten Form darstellen kann. Da jedoch die zuletzt hervorgehende Gleichung immer in einer Form erscheint, welche dem zuerst aufgestellten Hauptsatze genügt, so bleibt dieser der eigentliche Mittelpunct der neuen Theorie.

Stettin, den 15. April 1845.

8.

Summation der Reihe $\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}}+\dots$ für $\varrho=0$.

(Von Herrn *Dr. Heine* zu Bonn.)

Einer grossen Anzahl von Aufgaben aus der Zahlentheorie dient die Untersuchung zur Grundlage, auf welche Art die Reihe

$$\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}}+\dots.$$

in's Unendliche wächst, während die positive Grösse ϱ sich der Null nähert. Diese Frage aus der Theorie der Reihen, welche von *Dirichlet* aufgeworfen und beantwortet worden ist, lässt sich auch ohne höheren Calcul erledigen, auf ganz ähnliche Art, wie man untersucht, in welchen Fällen die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\dots$$

convergirt.

Setzt man zur Abkürzung $G_m=\frac{1}{(k+m)^{1+\varrho}}$, $k+m=x$, wo m eine so grosse ganze Zahl bedeutet, dass x positiv und grösser als 1 ist, ist ferner die positive Grösse ϱ kleiner als 1, so wird

$$\frac{G_{m+1}}{G_m}\;\frac{(1+\varrho+k+m)}{k+m}=\frac{x^{1+\varrho}(x+1+\varrho)}{x(x+1)^{1+\varrho}}=\frac{x^{2+\varrho}+(1+\varrho)x^{1+\varrho}}{x^{2+\varrho}+(1+\varrho)x^{1+\varrho}+\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}x^{\varrho}+\dots}$$

kleiner als 1, indem unter den obigen Voraussetzungen

$$\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}x^{\varrho}\left\{1+\frac{(\varrho-1)}{3x}+\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{3\cdot4\cdot x^2}+\dots.\right\}$$

positiv ist. In der That ist zuerst die Grösse unter der Parenthese positiv, da die Summe des ersten und zweiten Gliedes d. h. $1+\frac{(\varrho-1)}{3x}$, des dritten und vierten, allgemein des $(2p-1)$ten und $2p$ten positiv ist, und die Reihe convergirt; ebenso ist $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}x^{\varrho}$, also der ganze Ausdruck positiv.

Demnach hat man

$$G_{m+1} < G_m \frac{(k+m)}{(k+m+\varrho+1)}$$

$$G_{m+2} < G_{m+1} \frac{(k+m+1)}{(k+m+\varrho+2)} < G_m \frac{(k+m)(k+m+1)}{(k+m+\varrho+1)(k+m+\varrho+2)}$$

also

$$1.\quad G_m + G_{m+1} + G_{m+2} + \ldots < G_m \left\{ 1 + \frac{(k+m)}{(k+m+\varrho+1)} + \frac{(k+m)(k+m+1)}{(k+m+\varrho+1)(k+m+\varrho+2)} + \ldots \right\}$$

Aehnlich findet man

$$\frac{G_{m+1}}{G_m} \cdot \frac{(k+m+1-\varrho)}{(k+m-2\varrho)} > 1,$$

also

$$2.\quad G_m + G_{m+1} + G_{m+2} + \ldots > G_m \left\{ 1 + \frac{(k+m-2\varrho)}{(k+m+1-\varrho)} + \frac{(k+m-2\varrho)(k+m+1-2\varrho)}{(k+m+1-\varrho)(k+m+2-\varrho)} + \ldots \right\}.$$

Die Reihen auf der rechten Seite von 1. und 2. lassen sich leicht summiren, indem *Gauss* in der *Disq. gen. circa ser. inf.* gezeigt hat, dass die Summe

$$3.\quad 1 + \frac{(n-h-1)}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(h+1)} + \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(h+1)(h+2)} + \ldots,$$

wenn h eine noch so kleine positive Grösse ist, durch $\frac{n-1}{h}$ ausgedrückt wird. Er zerlegt dazu 1 in $\frac{n-1}{h} - \frac{n-h-1}{h}$; fügt er das zweite Glied $\frac{n-h-1}{n}$ dazu, so wird

$$1 + \frac{n-h-1}{n} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)}{n+h}.$$

Die Summe der drei ersten Glieder ist dann $\frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)h}$, allgemein die der p ersten Glieder $\frac{n-1}{h} - \frac{1}{h} \cdot \frac{(n-h-1)(n-h)\ldots(n-h+p-2)}{n(n+1)\quad\ldots\quad(n+p-2)}$, wo das abzuziehende Glied mit wachsendem p zu Null convergirt.

Setzt man zuerst $n = k+m+\varrho+1$, $n-h-1 = k+m$, so wird $h = \varrho$, also positiv, folglich die rechte Seite von 1.

$$= G_m \frac{k+m+\varrho}{\varrho} = \frac{1}{\varrho(k+m)^\varrho} - \frac{1}{(k+m)^{\varrho+1}}$$

also *ist die Summe*

$$\varrho \sum_{s=m}^{s=\infty} \frac{1}{(k+s)^{1+\varrho}}$$

für jeden positiven Werth von k + m *und für jedes* ϱ, *welches zwischen* 0

und 1 *liegt, kleiner als* $\frac{1}{(k+m)^{\varrho}}+\frac{\varrho}{(k+m)^{\varrho+1}}$ *und grösser als* $\frac{1}{(k+m)^{\varrho}}$ $-\frac{\varrho}{(k+m)^{\varrho+1}}$. Es nähert sich also diese Summe, und daher auch

$$\varrho\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{(k+s)^{1+\varrho}}$$

mit abnehmendem ϱ der Grenze 1. Setzen, wie in diesem Sinne

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{(k+s)^{1+\varrho}}=\frac{1}{\varrho},$$

machen darauf $k=\frac{b}{a}$, so entsteht die gesuchte Gleichung:

$$\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}}+\ldots.=\frac{1}{a\varrho}$$

für $\varrho=0$.

Berlin, den 4. April 1845.

9.

Recherches*) sur les surfaces isothermes et sur l'attraction des ellipsoïdes

(*par Mr. Ch. Despeyrous à Paris, Docteur es-sciences.*)

Première Partie.

Surfaces isothermes.

1. Lagrange, le premier, a introduit, dans le calcul de l'attraction des corps, une certaine fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z du point attiré, dont les coëfficients différentiels du premier ordre pris successivement par rapport à x, y, z, expriment les composantes respectives suivant les axes des x, des y, des z, de l'attraction du corps sur ce point. Cette fonction exprime la somme des molécules du corps attirant, divisées chacune par la distance au point attiré. Elle a été tout récemment appellée par M. *Gauss* le *potentiel* du corps sur le point attiré.

Cette fonction jouit de cette propriété remarquable, que pour tout point extérieur au corps attirant, la somme des dérivées partielles du second ordre par rapport à chacune des variables x, y, z, est nulle; et qu'elle est égale à $-4\pi\varrho$, si le point attiré fait partie de la masse, ϱ étant la dentité du corps en ce point et π le rapport de la circonférence au diamètre.

Ainsi en désignant par V la fonction dont nous parlons, on aura, si le point attiré ne fait pas partie du corps,

$$(A)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,\quad \text{et}$$

$$(B)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\varrho,$$

si le point en fait partie.

---

*) L'auteur doit à la libéralité scientifique de M. Libri, l'honneur d'avoir exposé ces principes, le 16. Fevrier 1844, au cours du calcul des probalités dont cet illustre géomètre est chargé à la faculté des sciences de Paris.

Ces deux équations étant indépendantes de la forme des corps, et de la loi de leur densité, constituent des propriétés générales de l'attraction de la matière. La première a été découverte par Laplace, la seconde par M. *Poisson.*

Laplace a en ontre démontré un second théorème général concernant une couche infinement mince, jouissant de la propriété de n'exercer aucune action sur les points qui lui sont intérieurs: „L'attraction ou la répulsion de „cette couche sur un point quelconque de la surface externe, est dirigée suivant „la normale à cette surface en ce point, et egale à $4\pi\varrho\varepsilon$, ε designant l'épaisseur „de la couche au point attiré ou repoussé." Plus tard, ce théorème a été généralisé par M. *Poisson*: Ce savaut géomètre l'a étendu à un système de couches en équilibre, leur action simultanée étant nulle sur tout point intérieur à l'une quelconque d'entr'elles.

Les deux propositions que nous venons de citer, devaient naturellement servir de base à une théorie mathématique de l'attraction fondée sur son mode d'action, en raison directe des masses et inverse du carré des distances; théorie d'autant plus importante que c'est cette loi qui préside aux phénomènes électriques et magnétiques.

Le savaut géomètre M. *Gauss* a publié, dans ces dernières années, des théorèmes généraux sur les forces attractives fondés sur les équations (A) et (B). Ils feront désormais partie de la théorie dont nous parlons, qui pourrait être désignée sous le nom de *Théorie du potentiel.* M. *Chasles* a aussi publié dans les additions à la *connaissance des temps* pour l'année **1845**, un mémoire sur le même sujet.

Si actuellement on designe par U la température d'un point quelconque M d'un corps homogène parvenu à l'état des températures permanentes, on sait que cette fonction des coordonnées x, y, z de ce point, est assujétie à l'équation aus différentielles partielles du second ordre,

$$(C) \qquad \frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0.$$

2. De l'identité des équations (A), (C), ou peut déduire plusieurs conséquences importantes. En effet: 1. si on connait la loi de l'attraction d'un corps de forme déterminée sur un point extérieur, c'est-à-dire la fonction V dont les dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z représentent les composantes de l'attraction de ce corps sur le point; cette fonction devra vérifier l'équation (A). Elle fera donc connaitre la loi des températures permanentes

d'un corps solide homogène, terminé par une surface ayant un rapport déterminé avec celle du corps attiraut. La réciproque est vraie.

2. Quand par un calcul direct fondé sur la nature géométrique de la surface d'un corps homogène, ou par tout autrre moyen, ou aura déterminé les composantes de l'attraction de ce corps sur un quelconque de ses points, il sera facile (la densité et par suite la quantité $4\pi\varrho$ de l'équation (B) étant constantes) d'en déduire une fonction U vérifiant l'équation (C): ce qui conduira à l'expression analytique des températures permanentes d'un corps solide homogène terminé par une surface analogue à celle du corps attirant.

3. Enfin les théorèmes généraux du potentiel fondés sur l'équation (A), doivent éclairer la théorie mathématique de la chaleur en ce qui concerne les températures permanentes, fournir des résultats nouveaux et simplifier, sous plusieurs rapports, des théories déja connues.

Nous nous sommes proposé d'appliquer les considérations précédentes à la recherche des lois du mouvement de la chaleur, dans les corps solides homogènes terminés per des surfaces du deuxième degré, et parvenus à l'état des températures finales. Nous déduisons de ces lois la théorie de l'attraction des ellipsoïdes homogènes ou hétérogènes sur un point extérieur ou faisant partie de la masse.

Nous devons ajouter que la pluspart des résultats auxquels nous sommes arrivés, étaient déja connus; mais une méthode simple et rapide pour y parvenir, *déduite de la théorie du potentiel*, nous a paru utile. Elle rattache, en effet, à une même théorie (celle de l'attraction des corps) la théorie importante des *surfaces isothermes*, création toute moderne dûe à M. *Lamé* *). Elle fournit d'ailleurs une *nouvelle solution, independante de la théorie de la chaleur*, du problème de l'attraction des ellipsoïdes; et peut offrir, comme nous le ferons voir dans une autre occasion, quelques ressources à la théorie si imparfaite du mouvement des liquides, dans le cas très étendu ou ce mouvement dépend d'une équation semblable à l'équation (A).

3. Dans la théorie de la chaleur ou appelle surface *isotherme*, toute surface dont tous les points sont à une même température V.

Représentous-nous actuellement un corps terminé par deux surfaces isothermes, l'une à la température constante T, et l'autre à la température T',

*) Voir le tome V. des mémoires présentés par des savauts étrangers à l'Académie des sciences de Paris.

et supposons que les causes qui entretiennent tous les points de ces surfaces à une température constante soient permanentes; le corps finira par atteindre lui même un état thermométrique permanent. La température V d'un quelconque de ses points satisfera à l'équation

$$(A) \qquad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de ce point.

Il s'agit, quand on connaitra la nature des surfaces qui limitent un corps parvenu à l'état des températures finales, de déterminer l'équation générale des surfaces isothermes de ce corps, et la fonction V exprimant la loi des températures de tous ses points.

Nous allons à cet effet, en reprenant un calcul de M. *Sturm*, construire une formule générale, renfermant une belle propriété des surfaces isothermes, quelle que soit d'ailleurs leur nature géométrique.

Soit, A, (Fig. 1.) une des surfaces isothermes d'un corps quelconque, et

$$F(x, y, z) = a$$

l'équation générale de ces surfaces dans ce corps; a sera un paramétre constant pour une même surface de cette nature, mais variera de l'une à l'autre; en sorte que les constantes qui peuvent se trouver dans la fonction F devront être considérées comme des fonction de ce paramètre.

La température V d'un point quelconque du corps est une fonction des coordonnées x, y, z de ce point. En y transportant la valeur d'une de ces variables, z par exemple, donnée par cette dernière équation en x, y, et a, les variables x, y devront disparaitre de cette fonction, puisqu'elle doit conserver la même valeur pour tous les points de la surface isotherme A. Elle sera donc exprimée par une fonction du paramètre seulement,

$$1. \qquad V = \varphi(a).$$

Cela posé: soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M extérieur à cette surface A; ξ, η, ζ celles du point N pris dans l'enceinte que cette surface détermine, et r la distance de ces deux points, on aura

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

et par suite, comme il est facile de s'en assurer en effectuant simplement les calculs,

$$2. \qquad \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dz^2} = 0.$$

En multipliant l'équation (A) par $\frac{1}{r}$, l'équation (2.) par V, et retranchant les deux produits l'un de l'autre, il viendra en intégrant,

$$3.\quad \int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz \left\{\left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dy^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dz^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\right)\right\} = 0.$$

Nous prendrons pour limites de l'integrale, d'une part la surface isotherme A; d'autre part la surface même du corps, que nous supposerons être de dimensions infinies, afin que les conditions relatives à la surface n'altèrent point les lois générales de la diffusion de la chaleur dans l'intérieur des corps.

Le premier terme de cette équation, intégré par rapport à x en considerant y et z comme constants, fournit l'intégrale indéfinie

$$\int\!\!\int dy\,dz\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} - V\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dx}\right),\ \text{et pour intégrale définie}$$

$$-\int\!\!\int dy\,dz\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right) + \int\!\!\int dy'\,dz'\left(\frac{1}{r'}\frac{dV'}{dx'} - V'\frac{d\frac{1}{r'}}{dx'}\right);$$

la première partie de cette somme se rapportant à la surface A, et la seconde à la surface extérieure du corps que nos supposerons d'abord finie. La ligne PP' étant parallèle à l'axe des x, les lettres non accentuées seront relatives au point P et les lettres accentuées au point P' appartenant à la surface extérieure du corps. On V' étant la température de ce dernier point, et $\frac{dV'}{dx'}$ la composante, suivant l'axe des x, du flux de chaleur qui passe en ce point, ces quantités ne pourront jamais devenir infinies quelles que soient les dimensions de cette surface; et comme r' désigne la distance NP', r' augmentera avec l'éloignement du point P', c'est-a-dire de la surface du corps. Donc, à cause de r' en dénominateur dans $\frac{1}{r'}\frac{dV'}{dx'}$, et de r'^2 dans $V'\frac{d\cdot\frac{1}{r'}}{dx'}$, la seconde partie de l'intégrale définie sera nulle quand la surface extérieure du corps aura des dimensions infinies. En sorte que le premier terme de l'équation (3.) donne

$$-\int\!\!\int dy\,dz\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} - V\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dx}\right).$$

Si on désigne par $d\omega$ l'élément superficiel de la surface A, au point P, et par α l'angle que fait avec l'axe des x la normale PH à cette surface en ce point, l'expression précédente deviendra

$$+\iint d\omega\cos\alpha\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}-V\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right);$$

cette double intégrale devant être étendue à tous les élémens de la surface A.

Il est évident que les deux autres termes de l'équation (3.) donneront des résultats analogues, et que si on désigne par β, γ les angles que fait cette normale PH avec les axes des y et des z, cette équation fournira la suivante

$$4.\quad 0=\iint\frac{d\omega}{r}\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{dV}{dy}\cos\beta+\frac{dV}{dz}\cos\gamma\right)$$
$$-\iint Vd\omega\left(\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dx}\cos\alpha+\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dy}\cos\beta+\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dz}\cos\gamma\right)$$

La composition et la décomposition du flux de chaleur suivent les mêmes lois que celles de la composition et décomposition des forces; donc

$$\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{dV}{dy}\cos\beta+\frac{dV}{dz}\cos\gamma$$

est la mesure de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse l'unité de surface au point P, dans le sens de la normale. Ainsi en désignant par dn l'épaisseur, dans la direction de la normale, d'une couche infiniment mince comprise entre deux surfaces isothermes dont les températures soient V et $V+dV$, on aura en observant que V est une fonction de a,

$$\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{dV}{dy}\cos\beta+\frac{dV}{dz}\cos\gamma=\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn}.$$

En effectuant les différentiations indiquées, on obtiendra aussi en désignant par i l'angle formé par les droites NP, HP,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\alpha+\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dy}\cos\beta+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\gamma=+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)$$
$$=+\frac{\cos i}{r^2}.$$

Donc, l'équation (4) se transforme en celle-ci

$$\iint\frac{d\omega}{r}\frac{da}{dn}=\iint V\frac{\cos i\,d\omega}{r^2}.$$

Or, M. *Gauss* a démontré que pour tout point N intérieur à une surface quelconque, $\iint\frac{\cos i\,d\omega}{r^2}$ étendue à toute la surface, était égale à 4π *);

*) En effet; $d\omega$ étant l'élément superficiel dans la direction de la normale PH, $\cos i\,d\omega$ sera la grandeur de cet élément estimé dans la direction NP, situé à la distance du point N marquée par r; et parconséquent $\frac{\cos i\,d\omega}{r^2}$ sera la grandeur de cet élément à l'unité de distance de ce même point N. Ainsi $\iint\frac{d\omega\cos i}{r^2}$ étendue à toute la surface A sera égale à la surface d'une sphère d'un rayon égal à l'unite de longueur.

donc, en observant que pour tous les points de la surface A, $\frac{dV}{da}$ et V ou $\varphi(a)$ dont constants, l'équation précédente donnera

$$5. \qquad \frac{dV}{da}\iint\frac{d\omega}{r}\,\frac{da}{dn} = 4\pi\,\varphi(a).$$

Enfin construisons sur la surface isotherme A une nouvelle couche différente de celle qui est comprise entre les deux surfaces isothermes infiniment voisines que nous avons déja considérée, et dont l'épaisseur, dans la direction de la normale, a été désignée par dn. A cet effet, portons intérieurement à la surface A, à partir de cette surface et sur chacune de ses normales, un segment ε proportionel à la valeur inverse de cette distance dn; les extrémités de ces segments appartiendront à la surface interne de la nouvelle couche, et son épaisseur sera réglée par l'équation

$$6. \qquad \varepsilon = \frac{da^2}{dn}.$$

Nous supposerons cette couche composée de matière, douée du pouvoir attractif selon la loi naturelle en raison inverse du carré des distances, et nous considérerons l'action qu'une pareille couche pourrait produire sur le point intérieur N.

Remarquons à cet égard que l'équation (5.) devient, en y introduisant la valeur de ε

$$7. \qquad \iint\frac{\varepsilon\,d\omega}{r} = \frac{4\pi\,\varphi(a)}{\frac{dV}{da}}\,da.$$

Or le premier membre de cette équation est le *potentiel* de cette couche sur le point N; il est donc, en vertu du second, indépendant des coordonnées ξ, η, ζ de ce point, et par suite l'action de cette couche sur ce point est nulle.

Il en résulte donc ce théorème: *Si, sur une surface isotherme quelconque, on construit,* (comme il a été dit), *une couche douée du pouvoir attractif suivant la loi naturelle, l'action de cette couche sur un point placé comme on voudra dans le vide qu'elle forme, sera nulle.*

Ce théorème établi: prenons une enveloppe homogène parvenue à l'état des températures permanentes et dont l'équation des parois soit

$$F(x,\,y,\,z) = a,$$

le paramètre a variant de l'une à l'autre de ces parois. Ces deux surfaces seront par hypothèse isothermes et nous devons chercher quelles sont les relations qui doivent exister entre les coëfficients b, c, ... qui se trouvent dans la

fonction F, et le paramètre a, pour que l'équation précédente puisse être l'équation générale des surfaces isothermes dans cette enveloppe. Or l'équation (6.) fera connaitre dn, épaisseur normale de deux surfaces isothermes infiniment voisines, quand on connaitra ε on réciproquement: Mais dans un grand nombre de cas il est facile de trouver la loi des épaisseurs de la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface isotherme, c'est-a-dire ε, on en déduira donc l'expression générale de dn; expression qui fera connaitre la nature des relations dont nous parlons.

4. Comme application des principes précédens, prenons pour équation des parois de l'enveloppe, la suivante

$$8. \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

qui appartient à un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une ou à deux nappes, selon que des trois quantités a^2, b^2, c^2, toutes, dans l'équation précédente, sont positives, ou deux, ou une seule. Dans un quelconque de ces trois cas, b et c devront être des fonctions du paramètre a. Pour les déterminer, cherchons d'abord ε par la condition que la couche auxiliaire construite sur une des surfaces isothermes (8.), n'exerce aucune action sur tout point intérieur N (Fig. 2.).

Prenons ce point pour le centre d'une surface conique infiniment déliée; elle interceptera sur cette couche deux élémens de volume dv, dv'; et si on appelle r, r' les distance NQ, NQ', ϱ la densité constante de la couche. μ la masse du point attiré N, et f le coëfficent de l'attraction universelle, les actions de chacun de ces deux élémens sur ce point seront,

$$\frac{\mu f \varrho dv}{r^2}, \qquad \frac{\mu f \varrho dv'}{r'^2}:$$

Mais en désignant par $d\sigma$, $d\sigma'$ les élémens superficiels répondants aux points P, P' on aura en négligeant un infiniment petit du quatrieme ordre,

$$dv = d\sigma\, dr, \qquad dv' = d\sigma' dr'.$$

En considérant actuellement le point N comme le centre d'une sphère d'un rayon égal à l'unité de longueur, la surface conique déterminera sur cette sphère un élément constant de surface, ω, et on aura $\frac{d\sigma}{r^2}=\frac{d\sigma'}{r'^2}=\omega$. En sorte que les expressions précédentes se changeront en

$$\mu f \varrho \omega dz, \qquad \mu f \varrho \omega dz'.$$

Donc, pour que ce point N demeure en équilibre sous l'action simultanée

de ces deux élémens, et par suite sous l'action de la couche entière, il faut et il suffit que $dr = dr'$ pour toute direction de la droite PP', quelle que soit d'ailleurs la position du point N dans le vide formé par la couche.

Or pour deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, la condition de $dr = dr'$ ou de $Pa = P'a'$ se trouve remplie; et M. *Gauss* a prouvé que sur une surface donnée on ne pouvait former qu'une *seule* couche infiniment mince, ayant la propriété de n'exercer aucune action sur les points qui lui sont intérieurs. Nous concluons de là que la surface interne de la couche auxiliaire est un ellipsoïde semblable et semblablement placé à l'ellipsoïde extérieur.

5. Pour déterminer actuellement la nature des fonctions b et c de a, nous déduirons de l'équation (6.),

$$\frac{s}{da} = \frac{da}{dn}$$

Or si on désigne par p (Fig. 3.) la longueur de la perpendiculaire oq abaissée du centre commun des deux ellipsoïdes semblables, sur le plan tangent en P; en menant par ce centre un plan parallèle au plan tangent, la portion PH de la normale à la surface extérieure, comprise entre ces deux plans, sera égale à p, et les deux triangles semblables PIK, PHo donneront

$$\frac{PI}{PH} = \frac{PK}{Po};$$

mais $\frac{PI}{PH} = \frac{s}{p}$, et en vertu de la similitude des ellipsoïdes, $\frac{PK}{Po} = \frac{da}{a}$; donc

$$\frac{s}{p} = \frac{da}{a} \quad \text{et par suite}$$

$$9. \qquad \frac{da}{dn} = \frac{p}{a}.$$

Menons par le point P une parallèle à l'axe des x, la portion de cette parallèle comprise entre la surface isotherme A et la surface isotherme infiniment voisine sera égale à dx, et on aura

$$dn = \cos\alpha . dx;$$

par des formules connues, on aura aussi

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \qquad \cos\alpha = \frac{px}{a^2};$$

donc l'équation (9.) se transformera en celle-ci,

$$a\,da\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{b^4}\right) = \frac{x\,dx}{a^2}.$$

En observant que b et c sout des fonctions du paramètre a et que pour tous les points de la parallèle à l'axe des x, passant par le point P, les variables y et z demeurent constantes, l'équation (8.) donnera,

$$\frac{xdx}{a^3} = \left(\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3}\frac{db}{da} + \frac{z^2}{c^3}\frac{dc}{da}\right) da;$$

on aura donc

$$\frac{x^2}{a^3} + \frac{ay^2}{b^4} + \frac{az^2}{c^4} = \frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3}\frac{db}{da} + \frac{z^2}{c^3}\frac{dc}{da}.$$

Cette équation devant être vérifiée pour tous les points d'une même surface isotherme (8.), elle donnera

$$\frac{db}{da} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{dc}{da} = \frac{a}{c} \quad \text{d'où}$$
$$b^2 = a^2 - \lambda^2, \qquad c^2 = a^2 - \mu^2,$$

λ^2, μ^2 étant deux constantes arbitraires. Ce qui démontre que les excentricités des deux sections principales de l'ellipsoïde doivent être constantes.

Le calcul précédent pouvant s'appliquer au cas de l'hyperboloïde à une nappe et à celui de l'hyperboloïde à deux nappes, on en conclut que:

1. Si on entretient à des températures constantes les parois d'une enveloppe homogène, terminée par deux ellipsoïdes homofocaux, toutes les surfaces isothermes de ce corps seront des ellipsoïdes homofocaux aux premiers.
2. Si les surfaces limites de l'enveloppe étaient hyperboloïdes à une nappe homofocaux, toutes les surfaces isothermes appartiendraient à la même espèce.
3. Si les surfaces limites étaient deux hyperboloïdes à deux nappes homofocaux, toutes les surfaces isothermes appartiendraient à cette même espèce.
4. Enfin, d'après les transformations connues, pour passer des surfaces du deuxième dégré, douées d'un centre, à celles qui en sont dépourvues, on pourrait encore énoncer deux autres théorèmes analogues; pour le cas où les parois de l'enveloppe seraient deux paraboloïdes elliptiques de même distances focales, et pour celui où elles seraient deux paraboloïdes hyperboloique de mêmes distances focales.

Dans le premier cas, l'équation générale des surfaces isothermes est

$$(D) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{a^2 - \mu^2} = 1;$$

dans le second

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{\mu^2 - a_1^2} = 1\,;$$

dans le troisième

$$(F) \qquad \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 - a_2^2} - \frac{z^2}{\mu^2 - a_2^2} = 1\,.$$

L'équation (E) exige que $\lambda < \mu$, ce qui est conforme à la nature du corps dont les parois sont représentées par cette équation.

Ces résultats avaient été exposés par M. *Lamé* dans sons mémoire sur les surfaces isothermes du deuxième dégré, par une méthode toute différente de la nôtre.

Il est facile de prouver par les équations connues des normales ou par celles des plans tangens aux surfaces (D), (E), (F), que une surface quelconque de l'un de ces systèmes coupe normalement toutes les surfaces des deux autres, et que toutes les surfaces de deux de ces trois systèmes tracent sur l'une quelconque du troisième toutes ses lignes de courbure.

M. M. *Ch. Dupin* et *Binet* avaient déja, chacun de son coté, fait connaitre ces belles propriétés.

6. La loi des températures permanentes dans chacun de ces corps est facile à connaitre: En effet, la quantitè de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse une surface isotherme quelconque, doit être évidemment constante et indépendante de la position de cette surface dans le corps; et le flux de chaleur, en un quelconque de ces points, normal à cette surface.

Or K étant la conductibilité de la matière dont le corps est composé,

$$K\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn},$$

sera la mesure du flux de chaleur, et

$$\iint K\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn}\,d\omega\,,$$

celle de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse la surface isotherme. On devra donc poser

$$\iint K\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn}\,d\omega = C,$$

équation qui, en vertu des notations précédentes, et en observant que $\frac{dV}{da}$ est constant pour toute l'étendue des limites de l'intégrale, qui sont celles de la surface isotherme que l'on considére, se changera en celle-ci,

$$10. \qquad \frac{dV}{da}\iint \varepsilon\, d\omega = C\cdot da.$$

Le facteur de $\frac{dV}{da}$ exprime le volume de la couche dont nous avons parlé à la fin du No. 3. Or pour une couche comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées, ou trouve facilement,

$$\iint \varepsilon\, d\omega = 4\pi b c\, da;$$

donc, l'équation (10.) deviendra

$$bc\frac{dV}{da} = C_1,$$

d'où remplaçant b et c par leurs valeurs $\sqrt{a^2-\lambda^2}$, $\sqrt{a^2-\mu^2}$, et intégrant

$$(G) \qquad V = C_1\int_\alpha^a \frac{da}{\sqrt{a^2-\lambda^2}\sqrt{a^2-\mu^2}} + C_2,$$

C_1, C_2 désignant deux constantes arbitraires que l'on déterminera à l'aide des températures constantes T, T' aux quelles sont entretenues les parois de l'enveloppe ellipsoïdale.

Cette fonction vérifie, comme il est aisé de s'en assurer, l'équation (A), elle donnera donc la loi des températures permanentes dans un corps homogène, terminé par deux ellipsoïdes homofocaux.

Les fonctions

$$V = C_1\int_{\alpha_1}^{a_1} \frac{da_1}{\sqrt{a_1^2-\lambda^2}\sqrt{\mu^2-a_1^2}} + C_2,$$

$$V = C_1\int_{\alpha_2}^{a_2} \frac{da_2}{\sqrt{\lambda^2-a_2^2}\sqrt{\mu^2-a_2^2}} + C_2$$

vérifieront aussi cette même équation (A), et donneront, la première, les températures permanentes dans le second corps dont nous avons parlé au No. 5.; la seconde, celles du troisième.

On pourrait exprimer, d'une manière très simple, au moyen des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce, ces fonctions V; on pourrait même dans deux cas particuliers, celui où $\lambda = \mu$, et celui où l'une de ces deux quantités est nulle, les exprimer à l'aide des fonctions ordinaires: Mais nous laisserons de côté tous ces détails, pour nous occuper exclusivement de l'enveloppe ellipsoïdale dont les applications sont importantes.

7. Nous allons d'abord vérifier par un calcul très-simple, que la quantité de chaleur qui passe à chaque instant par une quelconque des surfaces isothermes ellipsoïdales, est constante et indépendante de la position de cette surface dans le corps.

En effet l'expression

$$K\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn}d\omega,$$

est la mesure de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse l'élément $d\omega$ de la surface isotherme A, dans une direction normale à cette surface: et on sait que pour toute surface de cette nature la chaleur ne peut avoir d'autre direction. En sorte que si on conçoit un petit cylindre ayant pour base rectangulaire les élémens des deux lignes de courbure tracées sur cette surface ellipsoïdale isotherme, et pour axe l'élément de la ligne normale à cette surface, représentée par les deux équations (E), (F); l'expression précédente sera la mesure de flux de chaleur qui entre dans ce cylindre..

Or dans l'ellipsoïde,

$$d\omega = \frac{c^2}{z}\,dx\,dy\cdot\frac{1}{p};$$

donc par l'équation (9.), et remplaçant $\frac{dV}{da}$ par la valeur $\frac{C_1}{bc}$, l'expression du flux deviendra,

$$\frac{C_1K}{ab}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

En intégrant cette expression différentielle entre les limites de la surface isotherme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on obtiendra

$$4\pi KC_1,$$

quantité indépendante, en effet, de la position de cette surface.

8. L'expression $K\frac{dV}{dn}$ est, avons-nous dit, la mesure du flux de chaleur dans la direction propre de ce fluide pour les surfaces isothermes.

Or $$\frac{dV}{dn}=\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn} \text{ et } \frac{da}{dn}=\frac{p}{a},$$

donc $$K\frac{dV}{dn}=K\frac{dV}{da}\cdot\frac{p}{a}:$$

Ainsi *dans toute surface ellipsoïdale, ce flux est proportionnel en chaque point à la perpendiculaire abaissée de son centre, sur le plan tangent à cette surface en ce point.*

En sorte qu'aux extrémités des diamètres principaux, les flux de chaleur sont proportionnels aux longueurs de ces diamètres; ce qu'avait démontré M. *Lamé.*

9. Reprenant le cylindre infiniment étroit dont les arêtes curvilignes sont les trajectoires orthogonales aux surfaces isothermes, et appelant M, M' les points par lesquels passent ses deux bases $d\omega$, $d\omega'$ sur deux des surfaces isothermes (D) situées à une distance quelconque l'une de l'autre,

$$K\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn}\,d\omega, \qquad K\frac{dV'}{da'}\cdot\frac{da'}{dn'}\,d\omega',$$

seront la mesure des quantités de chaleur qui, dans l'unité de temps, traversent ces deux bases $d\omega$, $d\omega'$.

Or d'après ce qui a été dit, No. 7., et se rappelant que

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{z}{c},$$

ces expressions pourront être mises sous la forme

$$\frac{C_1K}{ab}\cdot\frac{c}{z}\,dx\,dy, \qquad \frac{C_1K}{a'b'}\cdot\frac{c'}{z'}\,dx'dy',$$

a', b', c' étant les demi-axes du second ellipsoïde et x', y', z' les coordonnées du point M'.

Les points M, M' étant situés sur une même trajectoire orthogonale ayant pour équations (E), (F), on trouvera aisément que les coordonnées de ces deux points vérifient les équations

$$\frac{x'}{a'}=\frac{x}{a}, \qquad \frac{y'}{b'}=\frac{y}{b}, \qquad \frac{z'}{c'}=\frac{z}{c},$$

d'où $dx'dy'=\frac{a'b'}{ab}\,dx\,dy$, et par suite

$$\frac{C_1K}{ab}\cdot\frac{c}{z}\,dx\,dy=\frac{C_1K}{a'b'}\cdot\frac{c'}{z'}\,dx'dy'.$$

Donc, les quantités de chaleur qui, dans l'unité de temps, traversent ces deux élémens sont égales entr'elles: c'est-à-dire que le flux de chaleur qui entre dans le cylindre infiniment étroit, par la base inférieure $d\omega$, traverse ce cylindre et sort par la base supérieure $d\omega'$ sans avoir éprouvé la moindre altération.

Ce résultat était d'ailleurs évident, attendu que la chaleur qui se propage dans ce cylindre n'éprouve aucune perte par les parois latérales, qu'à un élément quelconque $d\omega$ de la première surface en correspond un seul $d\omega'$ sur la seconde, et qu'enfin la température sur chaque surface est toujours la même en tous les points.

Les points M, M' sont appelés *correspondants.*

Ce qui précède suffit pour se faire une idée nette de la propagation de la chaleur dans une enveloppe solide homogène, terminée par deux ellipsoïdes homofocaux entretenus chacun à des températures constantes.

10. Le procédé qui nous a servi à trouver les résultats précédens, a tous les caractères d'une méthode analytique. Cependant si pour les corps particuliers que nous avons considérés dans cette première partie, on voulait prendre pour données géométriques, les théorèmes que nous avons énoncés à la fin du No. 5., théorèmes qui, comme nous l'avons dit, peuvent se démontrer immédiatement en partant des équations (D), (E), (F); on arriverait promptement aux résultats précédents relatifs aux surfaces isothermes, pour les corps terminés par des surfaces du deuxième degré.

Prenons, pour exemple, le cas de l'enveloppe terminée par deux ellipsoïdes homofocaux, et démontrons que toutes les surfaces isothermes de cette enveloppe sont des ellipsoïdes homofocaux aux premiers, c'est-à-dire que l'équation générale de ces surfaces est

$$(D) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-\lambda^2} + \frac{z^2}{a^2-\mu^2} = 1$$

Toutes les lignes représentées par les équations (E), (F), a_1 et a_2 passant par divers états de grandeurs, sont orthogonales aux différentes surfaces (D). Il est donc problable que ces lignes représentent la direction de la chaleur dans l'enveloppe ellipsoïdale, et que par suite les surfaces isothermes de ce corps sont données par l'équation (D).

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'en partant de cette équation (D) on puisse trouver une fonction V en a vérifiant l'équation générale (A), et telle que la quantité de chaleur qui passe à chaque instant à travers l'une des surfaces (D) soit constante et indépendante de la position de cette surface dans l'enveloppe.

Or, la valeur du flux de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse l'élément $d\omega$, est

$$K\,\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn}\,d\omega\,;$$

d'après ce qu'on a vu, No. 5.,

$dn = \cos\alpha\,dx$, $\qquad \cos\alpha = \frac{px}{a^2}$, $\qquad$ d'où $dn = \frac{px\,dx}{a^2}$: Mais l'équation (D) donne

$$\frac{x\,dx}{a^2} = \left(\frac{x^2}{a^3} + a\,\frac{y^2}{(a^2-\lambda^2)^2} + a\,\frac{z^2}{(a^2-\mu^2)^2}\right)da = \frac{a\,da}{p^2}$$

donc, $\frac{da}{dn} = \frac{p}{a}$; et par suite, en ayant égard au calcul du No. 7., on aura

$$K\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dn}\,d\omega = K\frac{dV}{da}\,\frac{c}{a}\cdot\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

Ainsi la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, toute la surface isotherme (D) répondant au paramètre a, sera égale à

$$K\frac{dV}{da}\cdot\frac{c}{a}\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = 4\pi K\frac{dV}{da}\cdot bc\,.$$

Pour que cette quantité soit constante et indépendante de la position de la surface isotherme, on devra donc poser

$$\frac{dV}{da}\,bc = C_1;\quad \text{d'où}$$

$$V = C_1\int_a^a\frac{da}{\sqrt{a^2-\lambda^2}\,\sqrt{a^2-\mu^2}} + C_2,$$

expression qui, comme on peut s'en assurer, vérifie l'équation génerale (A).

On en déduirait les théorèmes des No. 8. et suivants; et on aurait ainsi une démonstration géométrique des résultats précédemment obtenus.

Deuxième Partie.

Attraction des Ellipsoïdes.

---

11. Dans la théorie de la chaleur, on appelle surface isotherme, toute surface où la température est constante en tous les points; dans celle de l'attraction des corps, on donne le nom de surface de *niveau* à toute surface pour tous les points de laquelle le *potentiel* de ces corps est constant.

De même qu'en un quelconque des points d'une surface isotherme, le flux de chaleur a une direction normale à cette surface; de même aussi l'attraction ou la repulsion d'un corps ou système de corps, sur un point quelconque d'une de ses surfaces de niveau, est normale à cette surface en ce point.

Représentons-nous une enveloppe dont les parois soient entretenues à des températures constantes et dont l'équation des surfaces isothermes soit

$$11. \qquad F(x, y, z) = a,$$

a étant un paramètre variable de l'une à l'autre de ces surfaces. La loi des températures permanentes sera exprimée par une fonction de a, $\varphi(a)$, satisfaisant à l'équation (A).

Prenons actuellement un système de masses ayant pour une de ses surfaces de niveau l'une des surfaces (11.). Le potentiel de ces masses sur un des points de cette surface étant une fonction des coordonnées x, y, z de ce point, et devant être constant pour tous les points de cette surface, sera une fonction de a: en le désignant par V' on aura donc

$$V' = \psi(a).$$

Cette fonction V' variant avec le paramètre a qui indique la position de la surface considérée, et conservant la même valeur pour tous les points d'une quelconque des surfaces (11.); il s'ensuit que celles-ci seront toutes des surfaces de niveau de ce système de masses.

Cette fonction V' devra satisfaire à une équation semblable à l'équation générale (A), elle ne pourra donc différer de la fonction $\varphi(a)$ qui exprime la loi des températures, que d'une quantité constante.

De plus nous avons démontré, No. 3., que si sur une surface isotherme on construit, selon la règle qui en a été donnée, une couche auxiliaire infiniment mince douée du pouvoir attractif, son action sur un point quelconque pris dans l'enceinte qu'elle détermine, est nulle.

Ce théorème s'appliquera donc également à une surface de niveau relative à l'attraction. On pourrait, d'ailleurs, l'établir par un calcul identique à celui du No. 3.

Enfin démontrons qu'on peut prendre pour le système de masses dont nous parlons, la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface de niveau. Pour cela, il suffira évidemment d'après ce qui vient d'être dit que le potentiel de cette couche sur tous les points de la surface externe soit constant, c'est-à-dire que cette surface soit une surface de niveau relative à l'action de cette couche.

Or, cette couche jouit de la propriété caractéristique de n'exercer aucune action sur les points qui lui sont intérieurs; donc son action sur le point I (Fig. 1.) sera nulle. Menons par ce point un plan CD tangent à la surface interne de cette couche; son action sur ce point proviendra de la résultante des actions exercées par les portions CKD, CPD, sur ce même point; donc les forces qui résulteront de ces actions partielles seront égales, de même direction et de sens opposés. La première de ces forces pourra être prise pour celle

qui résulterait de l'action de cette même portion CKD sur le point P; car pour déduire les composantes de la dernière de ces forces, de celles de la première, il suffirait de changer les coordonnées du point I en celles du point P qui n'en diffèrent que par des infiniment petits du premier ordre, la couche étant infiniment mince. Or ce changement ne pourra amener dans les termes de ces composantes que des quantités d'un ordre infiniment petit par rapport à celui de ces termes, elles pourront donc être négligées. Par une raison semblable, la seconde force sollicitant le point I et provenant de l'action de CPD sur ce point, sera égale à celle qui résulterait de l'action de la même portion sur le point P. Mais l'attraction de la couche sur ce dernier, est égale à la résultante des actions exercées par les portions CKD, CPD sur ce point; il se trouvera donc sollicité par deux forces de même direction, de même sens et égales à celle qui provient de l'attraction de la partie CPD sur ce point. Or la couche étant infiniment mince, on pourra assimiler l'action de la calotte CPD sur le point P à celle d'une calotte sphérique sur ce même point; dès lors cette dernière force sera dirigée suivant la normale PH à cette surface, et le point P sollicité par une force double de même direction. Donc la surface externe de cette couche est une surface de niveau relative à son attraction *).

12. Ce qui précède renferme implicitemment une solution complète de l'attraction des ellipsoïdes, homogènes ou hétérogènes, sur des points extérieurs ou faisant partie de ces corps.

Prenons, en effet, pour surfaces isothermes, les ellipsoïdes homofocaux dont l'équation générale est (D); la couche auxiliaire du numéro précédent sera alors, No. 4., comprise entre deux ellipsoïdss semblables et semblablement placés; et ses surfaces de niveau seront, No. **11.**, des ellipsoïdes homofocaux à celui de sa surface externe.

Donc, si par le point attiré, pris en dehors de la couche, on fait passer un ellipsoïde homofocal à celui de sa surface externe (et on ne peut en faire passer qu'un seul) l'action de cette couche sur ce point sera dirigée suivant la normale, en ce point, à cette surface de niveau relative à cette couche.

De là ce théorème connu: *L'action qu'une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées*

---

*) On déduirait de là par un calcul très-simple, le théorème de Laplace, énoncé au No. 1., et ce même théorème généralisé par M. *Poisson*.

exerce sur un point extérieur, est dirigée suivant la normale, en ce point, à l'ellipsoïde qui passe par le point attiré, et qui est homofocal à celui de la surface externe de la couche.

13. En vertu du No. 8, les attractions de cette couche sur les différents points de cet ellipsoïde homofocal passant par le point attiré, sont proportionnelles aux distances des plans tangens à cet ellipsoïde en ces points, au centre de la couche. Elles seront donc aux extrémités des diamètres principaux proportionnelles aux longueurs de ces diamètres.

14. Enfin d'après le No. 9., les attractions de cette couche sur deux élémens *correspondants* sont égales; et comme à un élément quelconque pris sur l'une des surfaces de niveau de la couche, répond un seul élément *correspondant* sur toute autre surface de niveau relative à la même couche, il s'ensuit que; *la somme des actions que cette couche exerce sur tous les points d'une quelconque de ses surfaces de niveau, est constante.*

Ce théorème aurait d'ailleurs pu se déduire des No. 7 et 11.

15. L'expression analytique v du potentiel de la couche sur le point attiré extérieur à cette couche, est facile à calculer. Car elle ne diffère que d'une quantité constante, de celle de températures permanentes de l'enveloppe ellipsoïdale terminée par deux surfaces de niveau relatives à cette couche.

Or, nous avons trouvé pour cette dernière, No. 6.,

$$V = C_1 \int_\alpha^a \frac{da}{\sqrt{a^2-\lambda^2}\sqrt{a^2-\mu^2}} + C_2\,,$$

a étant le demi-diamètre principal de l'ellipsoïde homofocal passant par le point attiré. En désignant donc par a_1, b_1, c_1 les longueurs des demi-axes principaux de cet ellipsoïde, et par a, b, c celles qui se rapportant à l'ellipsoïde externe de la couche, on pourra poser

$$(H)\qquad v = 4\pi\varrho f bcda \int_a^{a_1} \frac{da_1}{\sqrt{a_1^2-\lambda^2}\sqrt{a_1^2-\mu^2}}\,;$$

λ^2 étant égal à $a_1^2 - b_1^2$, μ^2 à $a_1^2 - c_1^2$, et ayant

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2\,, \qquad a_1^2 - c_1^2 = a^2 - c^2.$$

La constante C_1 a été remplacée par $4\pi\varrho f bcda$, ϱ étant la densité de la couche, $4\pi bcda$ son volume, et f le coëfficient de l'attraction universelle.

La composante, suivant l'axe des x, de l'attraction de cette couche sur le point attiré dont les coordonnées sont x, y, z, sera

$$(I)\qquad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{da_1}\frac{da_1}{dx} = 4\pi\varrho f bcda \cdot \frac{p^2 x}{a_1^3 b_1 c_1}\,,$$

en observant que $\frac{da_1}{dn} = \frac{p^2 x}{a_1^3}$ (Voyez le No. 5.) et que $b_1 = \sqrt{a_1^2 - \lambda^2}$, $c_1 = \sqrt{a_1^2 - \mu^2}$:

Mais $\cos\alpha = \frac{px}{a_1^3}$, donc

$$\frac{dv}{dx} = 4\pi\varrho f bcda \frac{p}{a_1 b_1 c_1} \cos\alpha.$$

On aurait des expressions analogues pour les composantes $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$, de l'attraction de cette couche sur le même point, suivant l'axe des y et l'axe des z.

16. La formule (I) ramène aux quadratures le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde, homogène ou hétérogène, sur les points extérieurs.

Dans l'un et l'autre cas, nous décomposerons, en effet, l'ellipsoïde en couches infiniment minces, chacun d'elles étant comprise entre deux ellipsoïdes semblables à celui qui termine le corps, et semblablement placés.

Considérons d'abord le cas de l'homogénéité:

Soient A, B, C, les longueurs des demi-axes de la surface ellipsoïdale qui termine le corps; a, b, c, celles des demi-axes de l'ellipsoïde externe d'une de ses couches; on aura

$$(12) \qquad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

Si l'on désigne par a_1, b_1, c_1 les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde auxiliaire passant par le point attiré et homofocal à l'ellipsoïde externe de la couche, on aura pour déterminer a_1 et par suite b_1 et c_1, les équations

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 + (b^2 - a^2)} + \frac{z^2}{a_1^2 + (c^2 - a^2)} = 1,$$

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 + (b^2 - a^2)}, \qquad c_1 = \sqrt{a_1^2 + (c^2 - a^2)},$$

x, y, z étant les coordonnées du point attiré.

Cela posé: la formule (I) donne l'expression de la composante, suivant l'axe des x, de l'attraction de cette couche sur le point x, y, z; il s'ensuit donc qu'en appelant $\frac{dV}{dx}$ celle qui se rapporte à la même direction et au corps tout entier supposé homogène,

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi\varrho f x \int_0^A p^2 \frac{bcda}{a_1^3 b_1 c_1}.$$

Les relations (12) convertissent l'équation (13) en celle-ci

$$\frac{x^2}{\frac{a_1^2}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{a_1^2}{a^2} + \left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{\frac{a_1^2}{a^2} + \left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = a^2$$

ou

$$(14)\qquad \frac{\frac{a^2}{a_1^2}x^2}{A^2} + \frac{\frac{a^2}{a_1^2}y^2}{A^2+\frac{a^2}{a_1^2}(B^2-A^2)} + \frac{\frac{a^2}{a_1^2}z^2}{A^2+\frac{a^2}{a_1^2}(C^2-A^2)} = \frac{a^2}{A^2}\,.$$

qui détermine a_1 en fonction de a. On en déduit

$$da = \frac{1}{p^2}\,a_1^3\,d\cdot\frac{a}{a_1},\qquad \text{partant}$$

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi\varrho f x\int_0^{\frac{A}{A_1}}\frac{bcd\cdot\frac{a}{a_1}}{b_1c_1},$$

A_1 désignant la longueur du demi-axe, dirigé suivant l'axe des x, de l'ellipsoïde passant par le point attiré et homofocal à celui qui termine le corps attirant.

Cette dernière expression peut successivement s'écrire,

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi\varrho f x\int_0^{\frac{A}{A_1}}\frac{bcd\cdot\frac{a}{a_1}}{\sqrt{a_1^2+(b^2-a^2)}\,\sqrt{a_1^2+(c^2-a^2)}}$$

$$= 4\pi\varrho f x BC\int_0^{\frac{A}{A_1}}\frac{\frac{a^2}{A^2}\,d\cdot\frac{a}{a_1}}{\sqrt{a_1^2+a^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}\,\sqrt{a_1^2+a^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)}}$$

$$= 4\pi\varrho f x BC\int_0^{\frac{A}{A_1}}\frac{\frac{a^2}{a_1^2}\,d\cdot\frac{a}{a_1}}{\sqrt{A^2+\frac{a^2}{a_1^2}(B^2-A^2)}\,\sqrt{A^2+\frac{a^2}{a_1^2}(C^2-A^2)}}$$

ou enfin, en posant $\frac{a}{a_1} = u$,

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi\varrho f x BC\int_0^{\frac{A}{A_1}}\frac{u^2du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\,\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}$$

ce qui est la formule connue; A_1 étant donné par l'équation

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A_1^2+(B^2-A^2)} + \frac{z^2}{A_1^2+(C^2-A^2)} = 1$$

17. Considérons actuellement le cas de l'ellipsoïde hétérogène, et supposons que chacune des couches infiniment minces dont il est composé soit homogène, la densité variant de l'une à l'autre de ces couches suivant une loi exprimée par une fonction du demi-axe principal a de la surface externe de chacune d'elles. On pourra encore, dans ce cas général, ramener aux quadratures la détermination des composantes, suivant les axes des coordonnées,

de l'attraction de ce corps sur les points extérieurs.

Car ayant posé

$$\varrho = F(a),$$

l'équation (14.) donnera

$$\varrho = F\left(Au\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)}+\frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}}\right),$$

et par suite

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi x f BC \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 F(Au\sqrt{\;\;})du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

On obtiendrait des expressions analogues pour les deux autres composantes, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$.

On peut remarquer qu'en prenant la densité ϱ en raison inverse du demi-axe a comme l'ont supposé plusieurs géomètres, l'expression précédente s'obtient sous forme finie par les premières règles du calcul intégral; mais nous ne saurions nous arrêter à ces détails. Il est cependant remarquable qu'on puisse dans certains cas, obtenir sons forme finie, les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène, tandisque que pour le cas des ellipsoïdes homogènes il faut recourir aux fonctions elliptiques.

18. Si le point attiré était situé à la surface du corps, on aurait $A_1 = A$ et parconséquent

$$(K)\qquad \frac{dV}{dx} = 4\pi\varrho f BCx \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}$$

$$= 4\pi\varrho f x\,\frac{BC}{A^2}\int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1+u^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}\sqrt{1+u^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)}}.$$

19. Enfin, si le point attiré faisait partie du corps, on ferait passer par ce point un ellipsoïde a, b, c semblable à celui qui termine le corps. L'action de la couche comprise entre ces deux surfaces semblables, sur ce point, serait nulle; et celle de la partie restante du corps aurait pour composante, suivant l'axe des x, la même expression (K), en vertu des équations

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

On obtiendrait les deux autres composantes $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, par un simple échange de lettres.

Elles ameneraient donc de nouvelles quadratures à effectuer; mais par

un changement de variable indépendante dû à Laplace (voir le 3. livre de la mécanique céleste) on peut faire dépendre le calcul des trois composantes, de la détermination d'une seule intégrale.

M. *Jacobi* a aussi présenté les trois composantes de l'attraction des ellipsoïdes sur les points intérieurs sous une forme très élégante.

Pour les obtenir, cet habile géomètre pose

$$u = \frac{A}{\sqrt{\alpha + A^2}},$$

α étant la nouvelle variable indépendante; et on trouve facilement

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi\varrho f \cdot \frac{x}{A^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right)}},$$

$$\frac{dV}{dy} = 2\pi\varrho f \cdot \frac{y}{B^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right)}},$$

$$\frac{dV}{dz} = 2\pi\varrho f \cdot \frac{z}{C^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right)}}.$$

20. Le beau théorème de M. *Ivory* sur le rapport de l'attraction exercée par deux corps terminés par des surfaces ellipsoïdales et homofocales entr'elles, sur deux points correspondants situés sur les surfaces respectives de ces deux corps, peut se déduire des formules précédentes.

En effet, soient A, B, C les longueurs des demi-axes de l'une de ces surfaces; A', B', C' celles de la deuxième que nous supposerons intérieure à la première et concentrique; x', y', z' les coordonnées d'un point M' placé sur la première, et x, y, z celles d'un autre point M placé sur la seconde.

Les surfaces étant homofocales et les points M, M' étant correspondants, on aura

$$B^2 - A^2 = B'^2 - A'^2, \qquad C^2 - A^2 = C'^2 - A'^2,$$
$$\frac{x'}{x} = \frac{A}{A'}, \qquad \frac{y'}{y} = \frac{B}{B'}, \qquad \frac{z'}{z} = \frac{C}{C'}.$$

Désignons actuellement par X la composante, suivant l'axe des x, de l'attraction du premier ellipsoïde sur le point M intérieur à ce corps; et par X' celle qui est relative au second ellipsoïde sur le point extérieur M', et suivant la même direction.

On aura par les formules des No. 16. et 18.,

$$X = 4\pi\varrho fBCx\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}},$$

$$X' = 4\pi\varrho fB'C'x'\int_0^{\frac{A'}{A}} \frac{u^2du}{\sqrt{A'^2+u^2(B^2-A^2)}\sqrt{A'^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

Changeons de variable indépendante, à l'aide de l'équation $u = \frac{A'}{A}v$; la dernière formule se transformera, en ayant égard aux relations précédentes, en

$$X = 4\pi\varrho fB'C'x\int_0^1 \frac{v^2dv}{\sqrt{A^2+v^2(B^2-A^2)}\sqrt{A^2+v^2(C^2-A^2)}},$$

donc

$$\frac{X}{X'} = \frac{BC}{B'C'}; \text{ et par suite}$$

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{AC}{A'C'}, \qquad \frac{Z}{Z'} = \frac{AB}{A'B'};$$

Y, Y', Z, Z', désignant les composantes suivant les axes des y et des z, de l'attraction de ces deux corps sur les mêmes points M, M'.

Ces trois dernières égalités démontrent le théorème de M. *Ivory*.

Ce théorème réduisait evidemment le calcul de l'attraction des ellipsoïdes homogènes sur les points intérieurs et sur les points extérieurs, seulement à l'un ou l'autre de ces deux cas. Or le premier peut être traité d'une manière directe par un calcul fondé sur la nature particulière de la surface qui termine ces corps; on avait donc ainsi une théorie complète de l'attraction des ellipsoïdes homogènes. Mais il restait encore à examiner le cas des ellipsoïdes hétérogènes.

21. L'illustre auteur de la mécanique céleste se servait d'un théorème différent de celui de M. *Ivory*, pour passer de l'attraction des ellipsoïdes homogènes sur les points intérieurs, au cas des points extérieurs.

La démonstration de ce théorème est facile par ce qui précède. La formule (H), du No. 15., fait voir, en effet, que le potentiel d'une couche sur un point extérieur est proportionnel à son volume $4\pi bcda$, lorsque a_1, demi-axe de l'ellipsoïde auxiliaire passant pour le point attiré et homofocal à celui de la surface externe de la couche, est constant.

Donc, si on considère le potentiel pour le même point, d'une nouvelle couche terminée à l'extérieur par un ellipsoïde homofocal à celui de la surface externe de la première et à l'intérieur par un ellipsoïde semblable; on aura, en désignant par v' ce potentiel et par $4\pi b'c'da'$ le volume de cette seconde couche,

$$15. \qquad \frac{v}{v'} = \frac{bcda}{b'c'da'}.$$

Ainsi: *les potentiels de deux couches infiniment minces, comprises chacune entre deux ellipsoïdes semblables et dont les surfaces externes sont homofocales, sont pour un même point extérieur à ces couches, proportionnels à leurs volumes: les actions de ces deux couches sur ce même point, ont une même direction qui est celle de la normale, en ce point, de l'ellipsoïde qui y passe et qui est homofocal à leur surfaces externes.*

Cette dernière équation (15.) peut aisément s'étendre à deux corps homogènes terminés par des ellipsoïdes homofocaux, en décomposant chacun de ces corps en couches infiniment minces dont chacune serait comprise entre deux ellipsoïdes semblables.

En désignant donc par V, V' les potentiels de ces deux corps sur un même point extérieur; par A, B, C les demi-axes principaux du premier, et par A', B', C' ceux du second, on aura l'équation

$$V = \frac{ABC}{A'B'C'}\,V',$$

qui fera connaitre V par V' ou réciproquement.

Au reste, cette dernière équation pourrait se démontrer par la formule du No. 16., sans qu'on eût besoin de passer par la décomposition de chaque corps en couches infiniment minces.

On a, en effet, par cette formule

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi\varrho f B c x \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\;\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}$$

pour le premier ellipsoïde, et

$$\frac{dV'}{dx} = 4\pi\varrho f B'C'x \int_0^{\frac{A'}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A'^2 + u^2(B'^2 - A'^2)}\;\sqrt{A'^2 + u^2(C'^2 - A'^2)}}$$

pour le second; A_1 ayant evidemment la même valeur pour les deux.

Or, en posant $u = \frac{A'}{A}v$, cette dernière formule se transforme immédiatement en celle-ci

$$\frac{dV'}{dx} = 4\pi\varrho f \frac{A'B'C'}{A} x \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{v^2 dv}{\sqrt{A^2 + v^2(B^2 - A^2)}\;\sqrt{A^2 + v^2(C^2 - A^2)}}$$

donc

$$\frac{dV}{dx} = \frac{ABC}{A'B'C'} \cdot \frac{dV'}{dx}, \text{ partant}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{ABC}{A'B'C'} \frac{dV'}{dy},$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{ABC}{A'B'C'} \frac{dV'}{dz}$$

et par suite

$$V = \frac{ABC}{A'B'C'} \cdot V'.$$

22. Les beaux travaux de M. *Poisson* *) sur l'attraction des ellipsoïdes dispensaient d'avoir recours à l'un ou l'autre de ces deux théorèmes. Ce Géomètre avait, par un calcul direct fondé sur la nature des surfaces ellipsoïdales, ramené aux quadratures les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur. Après avoir vaincu cette première difficulté de calcul qui avait pendant si long-temps resisté aux efforts des plus grands géomètres, ce célèbre analyste avait donné l'expression de l'attraction, sur un point extérieur, d'une couche infiniment mince comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées, et en avait déduit l'attraction d'une ellipsoïde hétérogène.

Cette savaute analyse constituait donc une théorie complète de l'attraction des ellipsoïdes, tant homogènes qu'hétérogènes, sur des points extérieurs ou faisant partie de la masse: mais elle avait ses difficultés.

Elles avaient été, il est vrai, éludées, comme on le voit par les travaux de M. *Chasles*; mais les méthodes employées par ce géomètre, quoique fort élégantes, reposaient sur des propositions de géométrie assez épineuses et supposaient qu'on devait considérer, tantôt une couche comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, tantôt des ellipsoïdes homofocaux.

Nous avons pensé qu'il était utile d'exposer un procédé simple, fondé sur des princips généraux, dont la marche ne pût être eclairé par les résultats supposés *inconnus* auxquels il conduit dans les applications, et qui fût susceptible d'être appliqué à d'autres corps.

Dans une autre occasion nous ferons connaitre les résultats qu'il offre pour les corps homogènes ou hétérogènes, terminés par quelques surfaces de révolution; soit qu'il s'agisse de la nature des surfaces isothermes de ces corps

*) Voir les mémoires de l'académie des sciences de Paris, Tom XIII.

dans leur état d'équilibre de température; soit qu'on veuille étudier l'attraction de ces corps sur des points intérieurs ou extérieurs à leurs masses.

23. Pour ne rien laisser à desirer sur la théorie importante de l'attraction des ellipsoïdes, nous allons la reprendre et en donner une démonstration indépendante de la considération des surfaces isothermes. Elle sera uniquement basée sur des théorèmes généraux déduits de la théorie du potentiel.

24. Soit

$$F(x, y, z) = a$$

l'une des surfaces de niveau d'un corps ou système de corps. Le potentiel V de ce système sur un des points de cette surface étant fonction des coordonnées de ce point, et devant conserver la même valeur pour tous les points de cette surface, sera une certaine fonction du paramètre a

$$V = \varphi(a).$$

Un calcul identique à celui du No. 3. démontrera que: *si, sur une surface de niveau quelconque, ou construit* (comme il a été dit dans ce numéro) *une couche douée du pouvoir attractif suivant la loi naturelle, l'action de cette couche sur un point placé comme on voudra dans l'enceinte qu'elle détermine, sera nulle.*

25. En prenant pour surface de niveau, un ellipsoïde

$$18. \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la surface interne de la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface de niveau sera, d'après le théorème précédent et le No. 4., un ellipsoïde semblable et semblablement placé.

La surface de niveau infiniment voisine sera, No. 5., un ellipsoïde homofocal au premier. Ce dernier ellipsoïde étant une surface de niveau du même système de masses, la surface interne de la couche auxiliaire que l'on construira sur lui sera un ellipsoïdé semblable et semblablement placé, et par suite la surface de niveau infiniment voisine sera un ellipsoïde homofocal au second et partant au premier; et ainsi de suite. Donc, *si un ellipsoïde est une surface de niveau d'un système de masses, tous les ellipsoïdes homofocaux au premier seront encore des surfaces de niveau de ce même système.*

L'équation générale de ces surfaces sera donc

$$(D) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{a_1^2 - \mu^2} = 1,$$

λ^2, μ^2 étant respectivement égaux à $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$.

Or nous avons vu, No. 11., que la surface externe de la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface de niveau, était elle même une surface de niveau relative à son attraction. Donc, on pourra dans le cas présent, prendre pour système de masses la couche auxiliaire construite sur l'ellipsoïde (18.), et dès-lors les surfaces représentées par l'équation (*D.*) seront des surfaces de niveau relatives à l'action de cette couche, dont la surface interne est un ellipsoïde semblable et semblablement placé à celui de sa surface externe.

26. Cette couche étant comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, et ses surfaces de niveau étant des ellipsoïdes homofocaux à celui de sa surface externe, il en résultera le théorème énoncé au No. 11.; en se rappelant toutefois que l'action d'un corps sur un point quelconque d'une de ses surfaces de niveau est dirigée suivant la normale, en ce point, à cette surface.

27. Un calcul semblable à celui du No. 8., démontrera le théorème énoncé au No. 13.

28. Cherchons actuellement l'expression v du potentiel de cette couche sur un point extérieur.

Nous avons démontré, No. 3., qu'en appelant $d\omega$ l'élément d'une surface quelconque A(Fig. 1.), r la distance NP, et i l'angle formé par cette droite NP et la normale PH à cette surface, on a

$$\iint \frac{d\omega}{r^2} \cos i = 4\pi,$$

cette intégrale étant étendue à toute la surface, et la point N étant placé comme on voudra dans son intérieur.

Cette théorème aura donc encore lieu pour une surface de niveau d'un corps ou système de corps, enveloppant tout le système.

Soit A une de ses surfaces de niveau; on a vu, No. 3., que

$$\iint \frac{d\omega}{r^2} \cos i = \iint d\omega \left(\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dx} \cos\alpha + \frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dy} \cos\beta + \frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dz} \cos\gamma\right);$$

mais $\frac{1}{r}$ est le potentiel d'une masse égale à l'unité, placée au point N, et le trinome soumis au signe $\int$ exprime l'action de cette masse sur le point P, estimée suivant la direction de la normale PH à cette surface: Donc, puisque l'intégrale du premier membre, étendue à toute la surface A, est égale à 4π, il en résultera que la sonune des valeurs numériques des actions exercées

par cette masse sur tous les points de cette surface et estimées suivant ses directions normales, sera égale à 4π.

En prenant le point N dans toute autre position du système de corps que l'on considère, on aura un résultat analogue pour la somme des valeurs numériques des actions normales exercées par la portion de masse égale à l'unité, appartenant a ce système et placée en ce point. Or pour un même point P quelconque, les actions normales exercées par ces deux masses, égales chacune à l'unité, donneront une résultante égale à leur somme et dirigée suivant la même droite. Donc la somme des valeurs numériques des actions normales de ces deux masses, sur tous les points de cette surface, sera égale à $4\pi \times 2$.

Ce résultat peut évidemment s'étendre à la masse entière du système de corps: Mais alors la surface A étant une surface de niveau de ce système, la somme des actions normales exercées par toutes les parties de cette masse sur un même point P de cette surface, exprimera l'action totale du système sur ce point. Il en résultera donc ce théorème dû à M. *Chasles* *):

La somme des valeurs numériques des attractions qu'un corps ou système de corps exerce sur les élémens superficiels d'une de ces surfaces de niveau, quand cette surface entoure le système de toutes parts, est égale à la masse entière du système multipliée par 4π.

Nous pouvons actuellement passer à la détermination du potentiel v. Car en conservant les notations du No. 15. et prenant pour système de masses la couche infiniment mince dont nous avons parlé au No. 26., le théorème précédent fournira l'équation

$$\iint \frac{dv}{dn}\, d\omega = 4\pi m,$$

m désignant la masse de cette couche.

Or $m = 4\pi\varrho bcda$, $\dfrac{dv}{dn} = \dfrac{dv}{da_1}\dfrac{da_1}{dn}$, $\qquad \dfrac{da_1}{dn} = \dfrac{\varepsilon}{da_1}$, $\qquad$ donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{da_1}\frac{dv}{da_1}\iint \varepsilon d\omega = 4\pi \cdot 4\pi\varrho bcda, \qquad \text{et}$$

comme $\iint \varepsilon d\omega = 4\pi b_1 c_1 da_1$, on en déduira

$$\frac{dv}{da_1} = 4\pi\varrho bcda\,\frac{1}{b_1 c_1}; \quad \text{d'où}$$

---

*) Voir les additions à la connaissance des temps pour 1845.

en rétablissant le coefficient f de l'attraction universelle qui a été pris pour unité,

$$v = 4\pi\varrho fbcda\int\frac{da_1}{b_1c_1}.$$

Avec cette expression, ou pourra évidemment continuer les calculs des No. 15. et suivants. On aura ainsi une *nouvelle solution* de l'attraction des ellipsoïdes, indépendante de la considération des surfaces isothermes.

29. On déduit de ce qui précède, sans nouveaux calculs, des théorèmes relatifs à l'électricité, et démontrés pour la première fois d'une manière analytique par M. *Poisson*, comme on le voit dans les *mémoires de l'institut pour l'année* 1811.

Lorsqu'un corps conducteur a été électrisé, le fluide en excès se retire à la surface et y forme une couche infinement mince, retenue à l'extérieur par le contact et la pression de l'air environnant. Sa surface externe est celle du corps électrisé, sa surface interne doit être telle que lorsque l'équilibre est établi, cette couche n'exerce aucune action sur le fluide neutre des points intérieurs du corps et que la répulsion qu'elle produit sur un point quelconque de sa surface externe, qui est celle du corps, soit normale en ce point a cette surface.

Si le corps électrisé est terminé par un ellipsoïde, on déduira de ce qui précède les conséquences suivantes:

1. La couche électrique, à la surface d'un ellipsoïde, est comprise entre deux ellipsoïdes semblables.
2. Son action répulsive sur un quelconque des points de sa surface externe est normale, en ce point, à cette surface et proportionnelle à son épaisseur en ce point; puisque la formule No. 15.

$$\frac{dv}{dx} = 4\pi\varrho fbcda\cdot\frac{\beta}{a_1b_1c_1}\cos\alpha,$$

se convertit, en vertu de $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ et $\frac{\varepsilon}{p} = \frac{da}{a}$, en

$$\frac{dv}{dx} = 4\pi\varrho f\varepsilon\cos\alpha,$$

et par suite l'action de la couche est égale à $4\pi\varrho f\varepsilon$.

3. Ses actions sur les différents points de sa surface externe sont, No. 13., proportionelles aux distances du centre du corps aux plans tangens à cet ellipsoïde en ces points. Donc, aux extrémités des diamètres principaux, elles sont proportionelles aux longueurs de ces diamètres.

D'ou il résulte que si l'on considère des ellipsoïdes de plus en plus allongés, le fluide électrique s'accumulera aussi de plus en plus vers leurs pôles; la pression exercée contre l'air extérieur augmentera et finira par dépasser la pression atmosphérique; en sorte que le fluide électrique s'échappera à travers l'air. De là l'explication mathématique de la déperdition du fluide électrique par les extremités des corps allongés.

4. Enfin le théorème (3.) aura encore lieu pour tous les points de tout autre ellipsoïde homofocal à celui de la surface du corps.

Paris en Août 1844.

10.
Note sur la division abregée en arithmétique.

(*Par l'éditeur.*)

Il a paru cette année chez Mathias un ecrit de 72 pages in 8° sous ce titre „La division abregée ou méthode rigoureuse et facile pour simplifier cette opération de l'arithmétique, par Mr. *P. Guy*, ancien élève de l'école polytechnique, capitaine d'artillerie, membre de la légion d'honneur.“

L'auteur prouve d'abord dans son ecrit que les méthodes de division abregée enseignées par *Bezout*, *Reynaud* et *Bourdon* sont fausses. Puis il discute la methode de Fourier qui à la verité est exacte mais peu maniable, si le quotient doit avoir beaucoup de chiffres, et ensuite il présente sa méthode par laquelle „le calculateur peut trouver à son choix avec moins de contention d'esprit et beaucoup plus rapidement que par la méthode vulgaire 1° le quotient cherché, sauf une erreur en plus ou en moins mais plus petite que 2 unités de l'ordre sur lequel on s'arrète; 2° le quotient cherché sauf une erreur en moins plus petite que 3 unités de l'ordre auquel on s'arrète; 3° au besoin le quotient exact lui même.“

L'auteur a presenté son ouvrage à l'académie des sciences de Paris et voici ce qu'en ont dit les commissaires Mrs. *Binet* et *Cauchy* dans leur rapport, dont un extrait est imprimé à la tête du traité.

„Quant à l'erreur commise, dans le second cas (l'orsqu'on effectue la divi„sion abregée), elle n'avait encore été estimée, du moins à notre connaissance, que „d'une manière inexacte. Les auteurs des traités d'arithmétique avoient supposé, „à tort, que la partie de cette erreur due à chaque soustraction ne surpasse pas „*une* unité de l'ordre auquel on s'arrète. M. le capitaine *Guy* rectifie cette as„sertion et prouve très-bien que la limite 1 doit être remplacée par la limite 2. „D'ailleurs l'appréciation de l'erreur qui peut affecter chaque dividende partiel, „dans la division approximative, conduit immédiatement comme l'auteur l'a re„marqué, à la règle que l'on devra suivre, si l'on veut obtenir le quotient de deux „nombres avec un degré d'approximation determiné. Nous ajouterons qu'à la „limite 2 ci-dessus rappelée, on peut substituer, avec avantage, la limite plus

22*

„basse 1,8 qui se trouve elle même indiquée par l'auteur. En resumé les com-„missaires pensent que l'auteur du mémoire soumis à leur examen, en rectifiant „une erreur qui n'avait point été aperçue, et en traçant avec sagacité la marche „que l'on doit suivre, dans la division approximative, pour obtenir le quotient „de deux nombres avec un degré d'approximation determiné, a ainsi apporté un „perfectionnement utile à une opération usuelle de l'arithmétique. Ils proposent, „en conséquence, à l'Académie d'accorder son approbation au mémoire de M. le „capitaine *Guy*."

Les conclusions de ce rapport ont été adoptées le 13 Janv. 1845 par l'Académie et l'ouvrage est adopté par l'Université, pour l'usage des collèges et des écoles normales.

Comme tout ce qui contribue au perfectionnement et à la facilitation du calcul de chiffres, bien que se soit un objèt très élémentaire, est d'une veritable importance, chacun ayant à faire ces calculs, l'éditeur de ce journal a cru devoir mentionner l'écrit de M. le capitaine *Guy* que les mathématiciens lirons avec intérèt.

En même temps il profite de cette occasion pour dire de son coté quelques mots sur l'objet en question, et pour rapporter la methode de division abregée dont il se sert lui même dans la pratique depuis nombre d'années.

Si l'on désire connaître non seulement le *quotient* de la division d'un nombre par un autre nombre, mais aussi le *reste* complet de la division, on n'y parviendra, vraisemblablement d'une manière plus facile et plus simple que par la division vulgaire généralement en usage. Mais il y a un grand nombre de cas où il ne s'agit point du *reste* de la division, mais seulement du *quotient*, et c'est là que la division dite *abregée* est à sa place. L'abréviation ou l'économie de calcul consistera alors en ce qu'on ne continuera pas à diviser successivement par le diviseur *entier* comme dans la division complète, pour trouver les chiffres du quotient l'un après l'autre, mais qu'on supprimera à chaque nouvelle division un des chiffres à droite du *diviseur*, jusqu'à son dernier chiffre. Cela est permis, parceque la division repetée par le diviseur entier, si l'on ne demande pas le reste, entraine des calculs et des chiffres qui n'influent plus sur le quotient. Mais il faut que l'opération soit alors faite de manière, que *tous* les chiffres du quotient trouvés par la division abregée ou soient exacts, ou qu'au moins le quotient trouvé ne diffère du veritable quotient que dans ses derniers chiffres, et au maximum d'un nombre d'unités appréciable, et cela est possible en effet.

Un exemple eclaircira pour le mieux la méthode à suivre. Nous emprunterons de M. le capitaine *Guy* cet exemple, savoir celui No. 3. page 8., en ecrivant d'abord la division *complète* pour faire voir l'effèt de la division *abregée.*

Diviseur.		Dividende.		Quotient.
1298768769		9045620239	50086175	696476575,0
$p_1 = 6.1298768769$	=	7792612614		
		1253007625	5	$= r_1$
$p_2 = 9.129876876$	=	1168891884		
$q_2 = 9.9$	=	8	1	
		84115733	40	$= r_2$
$p_3 = 6.12987687$	=	77926122		
$q_3 = 6.69$	=	4	14	
		6189607	260	$= r_3$
$p_4 = 4.1298768$	=	5195072		
$q_4 = 4.769$	=	3	076	
		994532	1848	$= r_4$
$p_5 = 7.129876$	=	909132		
$q_5 = 7.8769$	=	6	1383	
		85394	04656	$= r_5$
$p_6 = 6.12987$	=	77922		
$q_6 = 6.68769$	=	4	12614	
		7467	920421	$= r_6$
$p_7 = 5.1298$	=	6490		
$q_7 = 5.768769$	=	3	843845	
		974	0765767	$= r_7$
$p_8 = 7.129$	=	903		
$q_8 = 7.8768769$	=	6	1381383	
		64	93843845	$= r_8$
$p_9 = 5.12$	=	60		
$q_9 = 5.98768769$	=	4	93843845	
		0	00000000	$= r_9$

Dans cet exemple le dividende a precisément le nombre de chiffres nécessaire pour lui appliquer la division abregée sans diviser plus d'une fois par le diviseur *total.* S'il y avoit *plus* de chiffres au dividende, on devroit diviser plus d'une fois par le diviseur total, et s'il y en avoit *moins,* il auroit fallu ajouter au dividende le nombre nécessaire de zéro et séparer par une virgule dans le quotient un nombre égal de chiffres à droite. Il faut qu'on divise au moins *une* fois, savoir la *première* fois, par le diviseur total, toutes les fois qu'on demande pour le quotient tout le nombre des chiffres que la division abregée peut fournir.

Cela posé, les nombres designés par p et q dans l'exemple, *pris ensemble,* donnent chaque fois, comme on le voit, les nombres totaux et exacts qui sont à retrancher des restes r successifs. Les nombres p sont ceux qui se

Demande t'on un quotient qui soit exact à plusieurs *decimales*, il n'y a qu'à ecrire le nombre nécessaire de zéro à droite du dividende, d'opérer alors d'abord la division vulgaire pour autant de chiffres qu'on a ecrit de zéro, puis de faire la division abregée, et de séparer enfin par une virgule autant de chiffres à droite dans le quotient qu'on a introduit de zéro.

Ecrivons maintenant la division abregée pour l'exemple ci-dessus comme elle seroit à opérer effectivement suivant cette règle

Diviseur.		Dividende.		Quotient.
1298768769		9045620239	50086175	696476575,0
$p_1 = 6.1298768769$	=	7792612614		
		1253007625	$= r_1$	
$p_2 = 9.129876876,9$	=	1168891892		
		84115733	$= r_2$	
$p_3 = 6.12987687,6$	=	77926126		
		6189607	$= r_3$	
$p_4 = 4.1298768,7$	=	5195075		
		994532	$= r_4$	
$p_5 = 7.129876,8$	=	909138		
		85394	$= r_5$	
$p_6 = 6.12987,6$	=	77926		
		7468	$= r_6$	
$p_7 = 5.1298,7$	=	6494		
		974	$= r_7$	
$p_8 = 7.129,8$	=	909		
		65	$= r_8$	
$p_9 = 5.12,9$	=	65		
		0	$= r_9$	

Le quotient trouvé ne diffère pas du tout, comme on voit, du veritable quotient.

Donnons encore un autre exemple pour le même *diviseur*. Soit demandé la valeur de la fraction

$$\frac{0{,}00098370214}{0{,}0000000001298768769} = \frac{983702140000000}{1298768769}$$

à 8 décimales près.

Diviseur.	Dividende.	Quotient.
1298768769	983702140000000,00000000	75741,12986697|50
$p_1 = 7 \,.\, 1298768769 =$	9091381383	
$r_1 =$	7456400170	
$p_2 = 5 \,.\, 1298768769 =$	6493843845	
$r_2 =$	9625563250	
$p_3 = 7 \,.\, 1298768769 =$	9091381383	
$r_3 =$	5341818670	
$p_4 = 4 \,.\, 1298768769 =$	5195075076	
$r_4 =$	1467435940	
$p_5 = 1 \,.\, 1298768769 =$	1298768769	
$r_5 =$	1686671710	
$p_6 = 1 \,.\, 1298768769 =$	1298768769	
$r_6 =$	387902941	
$p_7 = 2 \,.\, 129876876{,}9 =$	259753754	
$r_7 =$	128149187	
$p_8 = 9 \,.\, 12987687{,}6 =$	116889188	
$r_8 =$	11259999	
$p_9 = 8 \,.\, 1298768{,}7 =$	10390150	
$r_9 =$	869849	
$p_{10} = 6 \,.\, 129876{,}8 =$	779261	
$r_{10} =$	90588	
$p_{11} = 6 \,.\, 12987{,}6 =$	77926	
$r_{11} =$	12662	
$p_{12} = 9 \,.\, 1298{,}7 =$	11688	
$r_{12} =$	974	
$p_{13} = 7 \,.\, 129{,}8 =$	909	
$r_{13} =$	65	
$p_{14} = 5 \,.\, 12{,}9 =$	65	
$r_{14} =$	0	

Le veritable quotient est

75741,1298669748

avec un reste de

0,0000000052499788

Le quotient trouvé n'en diffère que dans la *dixième* décimale.

Berlin, Juin 1845.

11.

Elementare Herleitung des Newtonschen Gesetzes aus den Keplerschen Gesetzen der Planetenbewegung.

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor in Leipzig.)

Eine Ellipse kann als die rechtwinklige Projection eines Kreises auf eine Ebene betrachtet werden, und folglich die Bewegung eines Planeten P in einer Ellipse als die Projection der Bewegung eines andern Körpers Q in einem Kreise auf die Ebene der Planetenbahn. Nach einem bekannten Satze der Mechanik wird alsdann auch die beschleunigende Kraft V, welche die elliptische Bewegung von P bewirkt, die Projection der beschleunigenden die Kreisbewegung von Q erzeugenden Kraft W auf die Ebene der Planetenbahn sein.

Diese Betrachtung giebt uns ein leichtes Mittel an die Hand, um mit Hülfe ganz elementarer Sätze die einen Planeten P treibende Kraft V zu bestimmen. Es sei AB (Taf. VII.) die grosse Axe $=2a$, C der Mittelpunct, CD die halbe kleine Axe, e die Excentricität und p der halbe Parameter der Ellipse, in welcher sich der Planet P um die in dem einen Brennpuncte S ruhende Sonne bewegt. Man beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis und gebe diesem eine solche Neigung $=i$ gegen die Ebene der Ellipse, dass die rechtwinklige Projection des auf AB normalen Halbmessers CE auf diese Ebene identisch mit CD wird; denn somit wird die Projection des Kreises auf dieselbe Ebene die Ellipse selbst sein. Da hiernach CDE ein rechter Winkel, und $CE=CB$, $=SD$ zufolge der Haupteigenschaft der Brennpuncte ist, so sind die Dreiecke CDE und DCS einander gleich und ähnlich, mithin $DE=CS$, und $\frac{DE}{CE}=\frac{CS}{CB}$ oder $\sin i=e$, d. h. *dem über die grosse Axe einer Ellipse beschriebenen Kreise muss, wenn von ihm die Ellipse als rechtwinklige Projection soll betrachtet werden können, eine solche Neigung gegen die*

Ebene der Ellipse gegeben werden, dass der Sinus dieser Neigung der Excentricität der Ellipse gleich ist. Ueberdies hat man

$$\cos i^2 = \frac{CD^2}{CE^2} = \frac{CD^2}{CB} \cdot \frac{1}{CB} = \frac{p}{a}.$$

Bei der Bewegung von P in der Ellipse und von Q im Kreise soll nun immer P die Projection von Q und mithin die Linie SP die Projection der Linie SQ sein. Die Flächengeschwindigkeit von SP, oder die Fläche, welche SP in der Zeiteinheit überstreicht, setze man $= \frac{1}{2}c$, und die Flächengeschwindigkeit von SQ, $= \frac{1}{2}k$, so ist die Fläche c die Projection der Fläche k, folglich

$$c = k \cos i, \quad k^2 = \frac{c^2}{\cos i^2} = \frac{a}{p}c^2 \text{ und } \frac{k^2}{a} = \frac{c^2}{p}.$$

Da nach Keplers zweitem Gesetze c constant und daher nach der allbekannten Schlussweise die auf P wirkende Kraft V nach S gerichtet ist, so wird auch k constant sein; die auf Q wirkende Kraft W wird die Richtung QS haben und es wird V, als die Projection von W, $= \frac{SP}{SQ} \cdot W$ sein.

Wir wollen nun zunächst die Kraft W zu bestimmen suchen und deshalb durch die den Kreis in Q berührende Linie QR die Geschwindigkeit von Q ausdrücken. Damit wird $k =$ dem Doppelten des Dreiecks $SQR = LQ . QR$ sein, wenn L den Fusspunct des von S auf CQ gefällten Perpendikels bezeichnet; folglich $QR = \frac{k}{LQ}$.

Es ist aber, wenn bei einem sich beliebig in einer Curve bewegenden Körper die Kraft, welche die Bewegung erzeugt, in eine Tangential- und eine Normalkraft zerlegt wird, letztere stets dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Halbmesser der Krümmung, gleich. Hiernach ist die auf Q nach der Richtung QC wirkende Normalkraft

$$N = \frac{QR^2}{a} = \frac{k^2}{a \cdot LQ^2} = \frac{c^2}{p . LQ^2}.$$

Zugleich aber ist N, als die nach der Richtung QC geschätzte Kraft W, $= \frac{LQ}{SQ} . W$, und daher

$$W = \frac{SQ}{LQ} . N = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{SQ}{LQ^3},$$

und somit endlich die gesuchte, auf P wirkende Kraft

$$V = \frac{SP}{SQ} . W = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{SP}{LQ^3}.$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass $LQ = SP$ ist. Denn fället man von Q auf AB das Perpendikel QM, so verhält sich

$$MQ : LS = CQ : CS = CE : DE = MQ : PQ;$$

folglich ist $LS = PQ$. Die bei L und P rechtwinkligen Dreiecke QLS und SPQ sind daher einander gleich und ähnlich; folglich ist $LQ = SP$. Hierdurch wird

$$V = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{SP^2}.$$

Die Kraft, welche einen Planeten nach der Sonne treibt, ist daher umgekehrt dem Quadrate seiner Entfernung von der Sonne proportional, und dieses nicht bloss für einen und denselben Planeten, sondern auch von einem zum andern, weil das Verhältniss $c^2 : p$ zu Folge des dritten Kepler'schen Gesetzes von einer Planetenbahn zur andern constant ist.

Zusatz. Die eben gemachte Construction ist insofern noch merkwürdig, als sich aus ihr für die Ellipse, wenn diese als die rechtwinklige Projection eines Kreises auf eine Ebene definirt wird, ein sehr einfacher synthetischer Beweis der Haupteigenschaft ihrer Brennpuncte ableiten lässt.

Ist nämlich S ein fester Punct in der Ebene eines Kreises und Q ein beliebiger Punct in der Peripherie desselben, und fället man von Q und S auf die durch S und Q zu legenden Durchmesser des Kreises die Perpendikel QM und SL, so verhalten sich dieselben

$$MQ : LS = CQ : CS,$$

wenn C des Kreises Mittelpunct bezeichnet; (d. h. die Entfernungen der Puncte Q und S von den durch S und Q zu legenden Durchmessern stehen in einem constanten Verhältnisse.)

Es werde nun der Kreis auf eine durch CS zu legende Ebene rechtwinklig projicirt, und es sei dabei P die Projection von Q, und D die Projection von E, als dem Endpuncte des auf CS perpendicularen Halbmessers, so verhält sich

$$PQ : MQ = DE : CE;$$

und wenn man diese Proportion mit der vorigen zusammensetzt:

$$PQ : LS = DE : CS;$$

(d. h. die Entfernungen eines beliebigen Punctes Q in der Peripherie und eines festen Punctes S in der Ebene eines Kreises, und zwar die Entfernung des Q von einer durch S und den Mittelpunct C des Kreises gelegten festen

Ebene, die des S von einer durch Q und C gelegten Geraden, stehen in einem constanten Verhältnisse.)

Bestimmt man folglich die Lage der Projections-Ebene so, dass $DE = CS$ wird, oder vielmehr umgekehrt: bestimmt man im Durchmesser AB, in welchem die Projections-Ebene den Kreis schneidet, den Punct S solchergestalt, dass $CS = DE$ und mithin, wegen der dann congruenten Dreiecke CDE und DCS, $SD = CE = \frac{1}{2}AB$ wird, so wird $PQ = LS$; woraus, weil alsdann die Dreiecke SPQ und QLS congruiren, $SP = LQ$ folgt.

Auf gleiche Weise zeigt sich, dass wenn man in AB die Linie DE von C nach F auf die andere Seite von C trägt, oder auch $FD = \frac{1}{2}AB$ macht und von F auf CQ das Perpendikel FK fället, dass dann $FP = KQ$ ist. Wegen $FC = CS$ ist aber auch $KC = CL$ und daher $FP + SP = KQ + LQ = 2CQ = AB$; welches die zu beweisende Eigenschaft der Brennpuncte F und S ist.

12.

Beweis eines geometrischen Satzes.

(Von dem Prem. Lieut. a. D. Herrn *A. Jacobi* zu Breslau.)

Im 9ten Bande dieses Journals sind auf Seite 411. vom Herrn Professor *Plücker* zwei neue Sätze in Bezug auf das einem Kegelschnitte eingeschriebene und umgeschriebene Sechseck aufgestellt. Es scheint dabei ein Druckfehler vorgekommen zu sein, von dem ich nicht weiss, ob er später verbessert worden ist. Der eine Satz folgt aus dem andern mit Hülfe des Princips der Reciprocität, und ich will daher nur den zweiten Satz zu beweisen versuchen, welcher heisst:

„Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein in demselben beschriebenes Sechseck gegeben sind, so lassen sich irgend zwei Winkel-Puncte dieses Sechsecks mit den vier übrigen durch 8 neue gerade Linien verbinden. Diese 8 Linien schneiden sich in 12 neuen Puncten. Diese 12 neuen Puncte lassen sich durch 42 neue gerade Linien verbinden. Von diesen 42 Linien gehen 6 nach einem allbekannten Satze durch den Pol derjenigen geraden Linie, welche jene beiden ersten Winkel-Puncte des eingeschriebenen Sechsecks verbindet; 12 schneiden sich zu vier in drei Puncten; 24 schneiden sich paarweise in solchen 12 Puncten, welche zu drei auf den vier Tangenten der vier übrigen Winkel-Puncte des Sechsecks liegen."

Sind A, A', B, B', C und C' die 6 gegebenen Puncte des Kegelschnitts, so sind nach den 4 letztern Puncten von jedem der beiden Puncte A und A' 4 Gerade g, also im Ganzen 8 Gerade g möglich. Jede Gerade g, die durch den Punct B geht, wird von den 4 durch A' gehenden Geraden g offenbar in 3 neuen Puncten p geschnitten, so dass im Ganzen 12 Puncte p entstehen. Werden irgend zwei der durch A gehenden Geraden g genommen, so lassen sich bekanntlich die 6 Puncte p derselben paarweise durch 9 Gerade k verbinden, unter denen aber offenbar 2 sich in A' schneidende Gerade g befindlich sind, so dass also nur 7 neue Gerade k entstehen. Die 4 den

Punct A enthaltenden Geraden g lassen sich auf 6 verschiedene Arten zu 2 verbinden, und es giebt daher im Ganzen 42 Gerade k.

In meiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen der ebenen Geometrie No. V." in diesem Journal ist z. B. der Durchschnitt der beiden Geraden AB' und $A'B$ durch $\frac{A,\ B}{A',\ B'}$, und das Sechseck im Kegelschnitte, in welchem die Durchschnitte der Seitenpaare AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$ liegen, durch $\frac{A,\ B,\ C}{A',\ B',\ C}$ bezeichnet; daher lassen sich die 12 Puncte p in folgenden Formen darstellen:

$$1.\ \frac{A,\ B}{A',\ B'}\quad 2.\ \frac{A,\ B'}{A',\ B}\quad 3.\ \frac{A,\ C}{A',\ C'}\quad 4.\ \frac{A,\ C'}{A',\ C}\quad 5.\ \frac{A,\ B}{A',\ C'}\quad 6.\ \frac{A,\ C'}{A',\ B}$$

$$7.\ \frac{A,\ B}{A',\ C}\quad 8.\ \frac{A,\ C}{A',\ B}\quad 9.\ \frac{A,\ B'}{A',\ C}\quad 10.\ \frac{A,\ C}{A,\ B'}\quad 11.\ \frac{A,\ B'}{A',\ C'}\quad 12.\ \frac{A,\ C'}{A,\ B'}.$$

Die 6 Geraden k, welche die Puncte 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8, 9 und 10, 11 und 12 verbinden, schneiden sich in dem Pole der Geraden AA' in Bezug auf den Kegelschnitt. Wir erinnern hier an die Eigenschaft zweier Vierecke eines Kegelschnitts, von denen das eine demselben umschrieben, das andere ihm eingeschrieben ist, und wo die Berührungspuncte des einen die Eckpunkte des andern sind.

Den 4 Sechsecken

$$\frac{A,\ B,\ C}{A',\ B',\ C'},\quad \frac{A,\ B',\ C'}{A',\ B,\ C},\quad \frac{A,\ B,\ B'}{A,\ C,\ C'},\quad \frac{A,\ C,\ C'}{A',\ B,\ B'}$$

gehören 4 Gerade zu, die durch den Durchschnitt der Geraden BC' und $B'C$ gehen, und die der Reihe nach die Puncte 1 und 3, 2 und 4, 7 und 11, 8 und 12 verbinden. Ebenso lassen sich zwei Systeme von 4 Sechsecken bilden, deren zugehörige Geraden die Durchschnitte von BB' und CC', BC und $B'C'$ enthalten; folglich schneiden sich 12 Gerade k zu 4 in 3 Puncten.

Ein Fünfeck im Kegelschnitte kann als ein Sechseck angesehen werden, in welchem die eine Seite unendlich klein ist; zwei solche Fünfecke sind z. B.

$$\frac{A,\ B,\ C'}{A',\ B',\ B},\quad \frac{A,\ B,\ B'}{A',\ C',\ B},$$

und im ersten liegen nach einem bekannten Satze die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AB und $A'C'$, $B'C'$ und BB in einer Geraden, wo BB die Tangente des Kegelschnitts im Puncte B darstellt. Die beiden Geraden dieser beiden Fünfecke verbinden die Puncte 1 und 6, 2 und 5, und schneiden

sich im Durchschnitt von $B'C'$ und BB. Ebenso schneiden sich zwei Gerade k im Durchschnitt von BC' und zwei im Durchschnitt von CC' mit der Tangente durch B. Dieselben Folgerungen ergeben sich für die Tangenten durch die Puncte B', C und C'; wodurch der Satz bewiesen ist.

Breslau, den 6. Juli 1845.

Journal d. Math. Bd XXXII Heft 2

Facsimile einer Handschrift von Condorcet

l'Europe voit aujourd'hui un spectacle nouveau dans l'histoire du monde, deux rois occupés de fonder sur les seuls principes de la justice naturelle une constitution vraiment libre, renfermant en elle même les germes de son perfectionnement, un sacrifice d'autorité ou de prérogative s'il leur a coûté ce qu'il lui a paru utile a des vues si grandes et si généreuses. On a vu souvent des Rois élus prodiguer tous les artifices de la politique, tous les moyens de l'ambition pour assurer à leur famille un sceptre indépendant de la volonté publique il était réservé a votre majesté d'en montrer un, occupé à établir l'hérédité pour le seul intérêt du peuple, et donner l'exemple du désintéressement le plus pur dans ce qui avait été avant lui le dernier terme de l'ambition humaine.

Je supplie votre majesté d'agréer l'hommage de la reconnaissance que je dois a toutes les marques d'intérêt et de bonté dont elle m'a comblé.

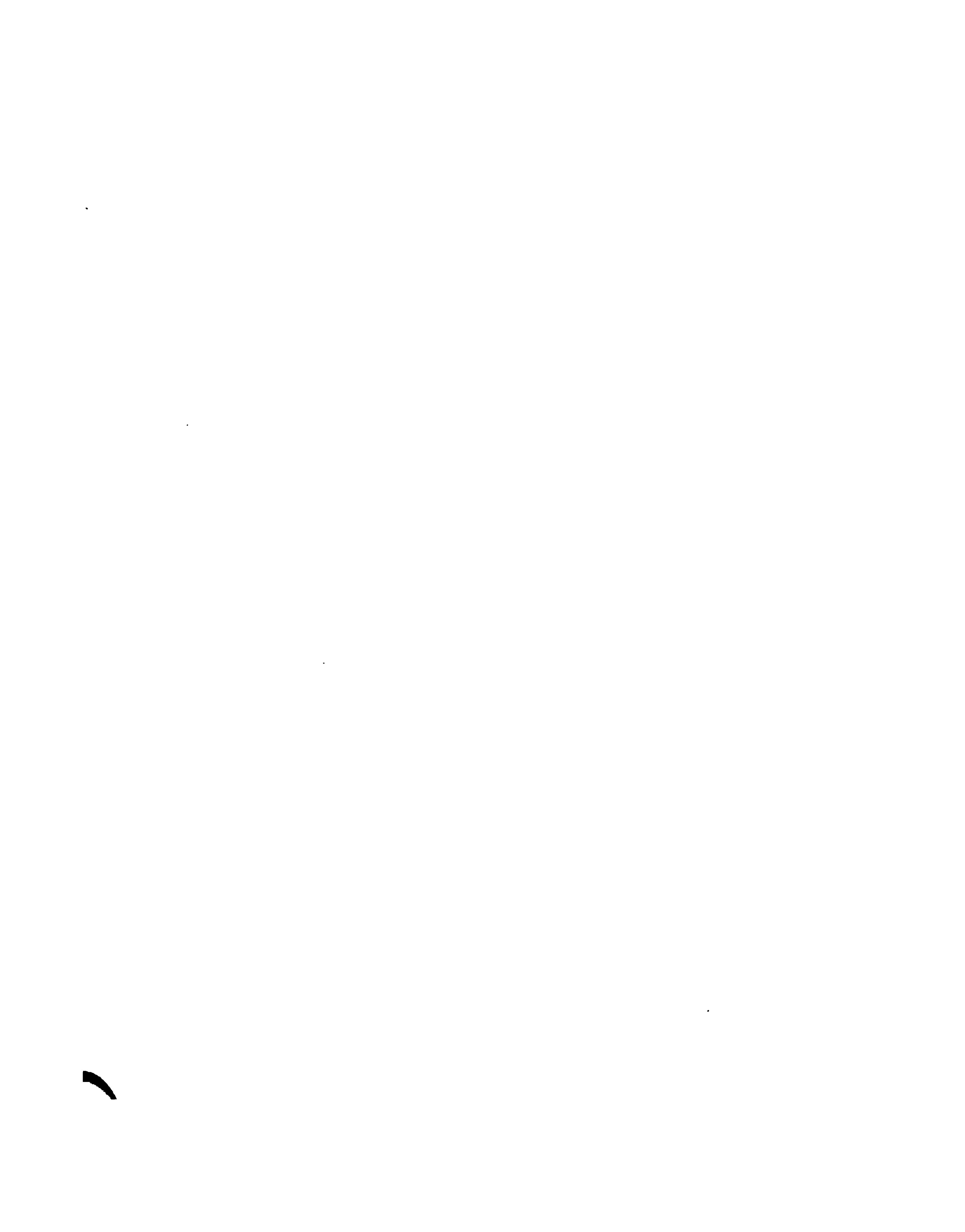
Je suis avec le plus profond respect,

Sire

de votre majesté

le très humble et très obéissant

serviteur. Condorcet



13.

Ueber die Anzahl und die Form der Bedingungsgleichungen, unter welchen eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln $n$ter Ordnung, und von der Form

$$V = y_n\varphi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) + \psi(x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) = 0$$

das unmittelbare Differentiations-Ergebniss einer nach der allgemeinen Constante aufgelöseten analogen Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung ist.

(Von Herrn Prof. *Raabe* zu Zürich.)

Seit *Pfaff* ist in den höhern Theilen des Integralcalculs ein vereinzelter, höchst folgenreicher Satz bekannt, welchem ich in der vorliegenden Abhandlung ein Analogon, namentlich, was den Inhalt desselben betrifft, anfügen will.

Einen sehr speciellen Fall des *Pfaff*'schen Satzes behandelte zuerst *Lagrange*, indem er eine lineare Differentialgleichung zwischen vier Variabeln auf eine analoge Gleichung zwischen drei Variabeln zurückführen lehrte; wodurch implicite die Möglichkeit herausgestellt ward, eine solche Differentialgleichung durch ein System zweier endlichen Gleichungen zwischen den vier Variabeln zu integriren.

Viel allgemeiner aber lautet der *Pfaff*'sche Satz: dass nämlich jede in Beziehung auf die Differentiale der Variabeln lineare Differentialgleichung mit n Variabeln durch ein System von $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$ Gleichungen zwischen den n Variabeln integrirbar sei, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Auf ein dem Wortlaute nach ganz ähnliches Resultat bin ich bei der Ausarbeitung des dritten Bandes meiner Differential- und Integralrechnung

gekommen, als ich mir den in der Ueberschrift angedeuteten Gegenstand zur Untersuchung vorlegte. Nachdem ich nämlich die eine, *von Euler, Condorçet* und *Lagrange* mitgetheilte ganz allgemeine Bedingungsgleichung, die in vorliegender Abhandlung in No. 4. mit (C) bezeichnet ist, gleichfalls hergestellt hatte, unternahm ich es, auch die Folgerungen aus derselben zu entwickeln, wie es *Lagrange* in der 21ten Vorlesung auf *S.* 417—421 seiner classischen „Leçons" gethan, wo er seine Untersuchungen mit folgenden Worten schliesst: „Ensuite on peut aussi prouver que, de même que pour les „fonctions du second ordre, l'équation de condition se décompose en deux, „qui doivent avoir lieu à la fois: pour les fonctions du troisième ordre, elle „se décomposera en trois; et pour les fonctions du quatrième ordre, elle se „décomposera en quatre; et ainsi de suite". Dieser Standpunct *Lagrange's* hat sehr viel Aehnlichkeit mit dem *Monge's* bei Gelegenheit der Rehabilitation der Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabeln, welche die Bedingungsgleichungen der Integrabilität nicht erfüllen. Dieser grosse Geometer zeigte nämlich, dass einer derartigen Differentialgleichung jedesmal durch ein System von Gleichungen entsprochen werden könne, deren Anzahl um eine Einheit höchstens von der der Variabeln übertroffen wird. Diese allerdings richtige Aussage ist nunmehr durch die oben erwähnten Leistungen der beiden grossen Analysten *Lagrange* und *Pfaff*, was namentlich die Differentialgleichungen erster Ordnung betrifft, zum grossen Nutzen für den Integralcalcul auf ihre engern Grenzen zurückgebracht worden.

Ein ganz ähnliches Bewenden hat es aber auch mit der Anzahl der unter einander wesentlich verschiedenen Bedingungsgleichungen, deren eine die in der Ueberschrift aufgestellte Differentialgleichung n ten Ordnung zu erfüllen hat, damit sie, oder die daselbst durch V dargestellte Function von $x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, das Ergebniss der Differentiation einer analogen Function $(n-1)$ ter Ordnung sei. Mit den von *Lagrange* angedeuteten n Bedingungsgleichungen hat es allerdings sein richtiges Verhalten; es tritt aber nur der unbeachtet gelassene Umstand hinzu, dass selbige nicht sämmtlich unter einander wesentlich verschieden sind, sondern dass beinahe die eine Hälfte derselben eine unmittelbare Folge der übrigen ist.

In diesen Blättern wird zuerst die oben erwähnte einzelne allgemeine Bedingungsgleichung abgeleitet und von derselben nicht nur nachgewiesen werden, dass beim identischen Bestandhaben derselben die in der Ueberschrift aufgestellte Function V in der That das Ergebniss der Differentiation einer

analogen Function $(n-1)$ter Ordnung sei, sondern es wird auch das Verfahren angedeutet werden, zur Kenntniss dieser letztern mittels einer Reihe auf einander folgender einfacher Quadraturen zu gelangen. Hierauf wird, nach Vorführung einiger besonderer Fälle, das von *Lagrange* angedeutete System von n Bedingungsgleichungen aufgestellt werden; worauf dann zum Beschlusse der allgemeine Beweis geführt werden wird, dass von den besagten n *Lagrange*-schen Bedingungsgleichungen, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, im ersten Falle $\frac{1}{2}(n-2)$ derselben aus den übrigen $\frac{1}{2}(n+2)$, im zweiten Fall aber $\frac{1}{2}(n-1)$ aus den übrigen $\frac{1}{2}(n+1)$ als Folge hervorgehen; so dass, im Fall die Ordnungszahl n *ungerade* ist, die Anzahl der noch übrigen $\frac{1}{2}(n+1)$ Bedingungsgleichungen der bis jetzt bekannten *kleinsten* Anzahl von Integralgleichungen gleich ist, welche einer linearen Differentialgleichung mit einer ungeraden Zahl von Variabeln entsprechen, und im Fall n gerade ist (in welchem Fall die Anzahl der noch übrigen Bedingungsgleichungen $\frac{1}{2}(n+2)$ $=\frac{1}{2}n+1$ ist), diese Zahl die einer linearen Differentialgleichung mit einer geraden Anzahl von Variabeln entsprechenden kleinsten Zahl von Integralgleichungen um eine Einheit übertrifft; womit das im Eingange angedeutete Analogon hergestellt ist; was auf einen noch innigeren Zusammenhang der hier parallel betrachteten zwei Fälle *hindeutet*, obgleich ich gegenwärtig hierüber noch nichts Näheres mitzutheilen im Stande bin.

I.

Wenn eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung, mit der absoluten Variabeln x und der relativen y, folgendermaassen dargestellt wird:

$$(1)\quad V=y_n\varphi(x,y,y_1,y_2,\ldots y_{n-1})+\psi(x,y,y_1,y_2,\ldots y_{n-1})=0,$$

wo $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$ die successiven Differentialquotienten von y nach x und φ und ψ beliebige Functionen aller dieser Grössen sind, so wird diese Gleichung, deren Ausdruck linkerhand vom Gleichheitszeichen wir bisweilen auch entweder durch V, oder durch $y_n\varphi+\psi$ darstellen werden, das Differentiations-Ergebniss einer Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung von der Form

$$(2)\quad a=f(x,y,y_1,y_2,\ldots y_{n-1})$$

sein, wo f eine Function der innerhalb der Parenthesen enthaltenen Grössen bezeichnet und a eine allgemeine Constante ist, die in besagter Function nicht vorkommt, falls die durch φ, ψ und f angedeuteten Functionen von $x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ folgenden zwei Gleichungen:

24*

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{df}{dy_{n-1}}, \\ \psi = \dfrac{df}{dx} + y_1\dfrac{df}{dy} + y_2\dfrac{df}{dy_1} + y_3\dfrac{df}{dy_2} + \dots\, y_{n-1}\dfrac{df}{dy_{n-2}}, \end{cases}$$

identisch genügen. Umgekehrt: wenn eine durch f ausgedrückte Function von $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ diesen letzten zwei Gleichungen identisch genügt, so stellt die Gleichung (2), in welcher rechterhand die eben erwähnte Function f vorkommt, eine unmittelbar vorhergehende vollständige Integralgleichung der in (1) vorgelegten Differentialgleichung $n$ter Ordnung dar.

Wenden wir uns nun zu den Folgerungen, die aus der Annahme eines identischen Bestandhabens der beiden Gleichungen in (3) gezogen werden können.

Differentiirt man unter dieser Annahme die zweite der Gleichungen in (3) partiell nach y_{n-k}, wo k eine der ganzen Zahlen $1, 2, 3, \dots n-1$ sein kann, so ergiebt sich unmittelbar folgende Gleichheit:

$$\frac{d\psi}{dy_{n-k}} = \frac{df}{dy_{n-k-1}} + \frac{d^2f}{dx\,dy_{n-k}} + y_1\frac{d^2f}{dy\,dy_{n-k}} + y_2\frac{d^2f}{dy_1\,dy_{n-k}} + \dots + y_{n-1}\frac{d^2f}{dy_{n-2}dy_{n-k}},$$

wo y_0 durch y zu ersetzen ist. Wird ferner das totale Differential von $\dfrac{df}{dy_{n-k}}$ durch $d.\dfrac{df}{dy_{n-k}}$ und der Einfachheit wegen das Differential dx der absoluten Variabeln x durch ω bezeichnet, so hat man folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{\omega}d\cdot\frac{df}{dy_{n-k}} = \frac{d^2f}{dx\,dy_{n-k}} + y_1\frac{d^2f}{dy\,dy_{n-k}} + y_2\frac{d^2f}{dy_1\,dy_{n-k}} + \dots + y_{n-1}\frac{d^2f}{dy_{n-2}dy_{n-k}} + y_n\frac{d^2f}{dy_{n-1}dy_{n-k}}.$$

Verbindet man diese Gleichung durch Subtraction mit der vorhergehenden, so erhält man

$$\frac{d\psi}{dy_{n-k}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{df}{dy_{n-k}} = \frac{df}{dy_{n-k-1}} - y_n\frac{d^2f}{dy_{n-1}dy_{n-k}},$$

welche Gleichung mit der Gleichung

$$\frac{d\left(\psi + y_n\dfrac{df}{dy_{n-1}}\right)}{dy_{n-k}} = \frac{df}{dy_{n-k-1}} + \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{df}{dy_{n-k}},$$

oder, die erste der beiden zu Grunde gelegten Gleichheiten beachtend, auch mit der folgenden Gleichung:

$$\frac{d(\psi + y_n\varphi)}{dy_{n-k}} = \frac{df}{dy_{n-k-1}} + \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{df}{dy_{n-k}};$$

gleichbedeutend ist. Beachtet man endlich noch die Bedeutung von V aus der vorgelegten Gleichung in (1), so ergiebt sich, als erste Folge der obigen Annahme, die Gleichheit

$$(\alpha)\qquad \frac{df}{dy_{n-k-1}} + \frac{1}{\omega}\frac{df}{dy_{n-k}} = \frac{dV}{dy_{n-k}} \qquad \{\text{von } k=1 \text{ bis } k=n-1\}$$

als begründet.

Wird ferner die zweite der Gleichheiten in (3) partiell nach y differentiirt, so erhält man:

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{d^2f}{dxdy} + y_1\frac{d^2f}{dy^2} + y_2\frac{d^2f}{dy_1dy} + \ldots + y_{n-1}\frac{d^2f}{dy_{n-2}dy}.$$

Es findet aber, wenn das totale Differential von $\frac{df}{dy}$ durch $d.\frac{df}{dy}$ bezeichnet wird, die Bestimmungsgleichung

$$\frac{1}{\omega}d.\frac{df}{dy} = \frac{d^2f}{dxdy} + y_1\frac{d^2f}{dy^2} + y_2\frac{d^2f}{dydy_1} + \ldots + y_{n-1}\frac{d^2f}{dy\,dy_{n-2}} + y_n\frac{d^2f}{dy\,dy_{n-1}},$$

Statt; daher hat man, durch Subtraction dieser von der vorhergehenden:

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{1}{\omega}d.\frac{df}{dy} = -y_n\frac{d^2f}{dy\,dy_{n-1}}, \text{ oder } \frac{d\psi}{dy} + y_n\frac{d^2f}{dy\,dy_{n-1}} = \frac{1}{\omega}d.\frac{df}{dy}.$$

Berücksichtiget man nun die erste der Gleichheiten in (3), so wie die Bedeutung von V aus der vorgelegten Gleichung (1), so stellt sich als zweite Folgerung der obigen Annahme folgende Gleichheit dar:

$$(\beta)\qquad \frac{1}{\omega}d.\frac{df}{dy} = \frac{dV}{dy}.$$

Wird endlich noch dieselbe zweite der Gleichheiten in (3) partiell nach x differentiirt und dann in ähnlicher Weise wie in dem mitgetheilten Falle verfahren, so gelangt man auf ein ganz ähnliches Resultat, nämlich auf die Gleichheit

$$(\gamma)\qquad \frac{1}{\omega}d.\frac{df}{dx} = \frac{dV}{dx}.$$

Mittels dieser in (α), (β) und (γ) zusammengestellten Folgerungen der Annahme eines identischen Bestandhabens der Gleichungen in (3) sind wir, in Vereinigung mit diesen selbst, im Stande, sowohl sämmtliche partielle Differentialquotienten erster Ordnung der Function f zu bestimmen, als die Bedingungsgleichung anzugeben, welche zur Realisirung besagter Annahme unerlässlich ist. Indem wir Solches in folgender No. des Nähern zeigen werden, stellen wir zu diesem Zwecke die Folgerungen hier noch übersichtlicher zu-

sammen; wobei wir, beachtend die Bedeutung von V aus der vorgelegten Differentialgleichung (1), statt der ersten der Gleichheiten in (3) auch folgende zu setzen berechtiget sind:

$$\frac{df}{dy_{n-1}} = \frac{dV}{dy_n}.$$

Stellen wir nun zuerst diese auf, lassen dann die Gleichheiten folgen, welche aus (α) durch die successive Annahme $k=1, 2, 3, \ldots n-1$ hervorgehen, und schliessen endlich mit der Gleichheit in (β), so stellt sich folgendes System heraus:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{df}{dy_{n-1}} = \dfrac{dV}{dy_{n-1}}, \\ \dfrac{df}{dy_{n-2}} + \dfrac{1}{\omega} d \cdot \dfrac{df}{dy_{n-1}} = \dfrac{dV}{dy_{n-1}}, \\ \dfrac{df}{dy_{n-3}} + \dfrac{1}{\omega} d \cdot \dfrac{df}{dy_{n-2}} = \dfrac{dV}{dy_{n-2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{df}{dy_1} + \dfrac{1}{\omega} d \cdot \dfrac{df}{dy_2} = \dfrac{dV}{dy_2}, \\ \dfrac{df}{dy} + \dfrac{1}{\omega} d \cdot \dfrac{df}{dy_1} = \dfrac{dV}{dy_1}, \\ \dfrac{1}{\omega} d \cdot \dfrac{df}{dy} = \dfrac{dV}{dy}; \end{cases}$$

welches die grösste Aehnlichkeit mit dem im zweiten Bande meiner Differential- und Integralrechnung in No. 371. unter (5) zusammengestellten Systeme von Gleichungen hat, welches wir demnach, eben wie dieses selbst, zur Bestimmung der verschiedenen partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der Function f (mit Ausnahme des nach x), als zur Angabe der unerlässlichen Bedingungsgleichung in den folgenden No. zum Grunde legen werden.

Die Bestimmung des partiellen Differentialquotienten der Function f nach x findet sich, wenn man die Gleichheiten in (3), nachdem die erstern mit y_n multiplicirt worden, addirt. Man erhält dadurch, beachtend die Bedeutung von V, die Bestimmungsgleichung

$$(5) \quad \frac{df}{dx} = V - \left(y_1 \frac{df}{dy} + y_2 \frac{df}{dy_1} + y_3 \frac{df}{dy_2} + \ldots + y_{n-1} \frac{df}{dy_{n-2}} + y_n \frac{df}{dy_{n-1}}\right),$$

welche den in Rede stehenden partiellen Differentialquotienten als bekannte Function von $x, y, y_1, y_2, \ldots$ angiebt, wenn die unmittelbar vorher erwähnten partiellen Differentialquotienten als bereits bestimmt vorausgesetzt werden.

Endlich hat man nach (9) die Bedingungsgleichung

$$(6) \qquad \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{df}{dx} = \frac{dV}{dx},$$

die sich aber als eine identische zu erkennen giebt, wenn man die vorhergehende Gleichung (5) und das in (4) zusammengestellte System zum Grunde legt. Wir rechtfertigen diese Behauptung der vorliegenden No. auf folgende Weise.

Stellt man bei Zugrundelegung der Gleichung (5) das totale Differential von $\frac{df}{dx}$ aus derselben her, so findet sich

$$\frac{1}{\omega} d \cdot \frac{df}{dx} = \frac{dV}{dx} + \left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{df}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dV}{dy_1} - \frac{df}{dy} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{df}{dy_1}\right) y_2$$
$$+ \left(\frac{dV}{dy_2} - \frac{df}{dy_1} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{df}{dy_2}\right) y_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(\frac{dV}{dy_{n-1}} - \frac{df}{dy_{n-2}} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{df}{dy_{n-1}}\right) y_n + \left(\frac{dV}{dy_n} - \frac{df}{dy_{n-1}}\right) y_{n+1}.$$

Legt man ferner die in (4) zusammengestellten Gleichungen zum Grunde, so reducirt sich letzteres Ergebniss auf

$$\frac{1}{\omega} d \cdot \frac{df}{dx} = \frac{dV}{dx};$$

welches genau die in (6) aufgestellte Gleichung ist. Demnach stellt sich solche, wie behauptet, als Folge der Gleichungen in (4) und (5) heraus.

2.

Wir gehen nunmehr zur Bestimmung der verschiedenen partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der Function f nach den Grössen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ über, die wir, wie auch die Bedingungsgleichung, welche zur Realisirung der Eingangs vorhergehenden No. getroffenen Annahme unerlässlich ist, aus dem Systeme der Gleichungen in (4) ziehen. Wird nämlich die erste der Gleichungen in (4) total differentiirt, durch ω dividirt, und dann von der zweiten desselben Systems subtrahirt, so erhält man

$$\frac{df}{dy_{n-2}} = \frac{dV}{dy_{n-1}} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{dV}{dy_n}.$$

Wird diese Gleichung total differentiirt, durch ω dividirt und das Ergebniss von der Gleichung des Systems in (4) subtrahirt, so ergiebt sich

$$\frac{df}{dy_{n-3}} = \frac{dV}{dy_{n-2}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_{n-1}} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_n}.$$

Behandelt man diese Gleichung wie die unmittelbar vorhergehende, und subtrahirt das Ergebniss von der vierten der Gleichungen in (4), so findet sich folgende Gleichung:

$$\frac{df}{dy_{n-k}} = \frac{dV}{dy_{n-3}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_{n-2}} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_{n-1}} - \frac{1}{\omega^3}d^3\cdot\frac{dV}{dy_n}.$$

Fährt man so fort, nämlich das jedesmal erhaltene Resultat total zu differentiiren, durch ω zu dividiren und das Ergebniss von einer entsprechenden unter den Gleichungen in (4) zu subtrahiren, so ergiebt sich auch folgende allgemeine Bestimmungsgleichung:

$$\frac{df}{dy_{n-k}} = \frac{dV}{dy_{n-k+1}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_{n-k+2}} + \frac{1}{\omega^2}d\cdot\frac{dV}{dy_{n-k+3}} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^{k-1}}d^{k-1}\cdot\frac{dV}{dy_n},$$

in welcher k alle ganzen Zahlenwerthe von 1 bis n bekommen kann. Wird hier $k = n$ augenommen, so erhält man, wenn y_0 durch y ersetzt wird, die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{df}{dy} = \frac{dV}{dy_1} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_2} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^{n-1}}d^{n-1}\cdot\frac{dV}{dy_n}.$$

Wird auch noch diese Gleichung total differentiirt, durch ω dividirt und das Ergebniss von der letzten der Gleichungen in (4) subtrahirt, so stellt sich die noch V enthaltende Gleichung

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_1} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{\omega^n}d^n\cdot\frac{dV}{dy_n}$$

heraus, welche, beachtend die Bedeutung von V aus der im Eingange vorgelegten Differentialgleichung $n$ter Ordnung in (1), die eigentliche Bedingungsgleichung ist, welcher die durch φ und ψ bezeichneten Functionen von x, y, y_1, y_2, ... in dieser Differentialgleichung zu genügen haben, damit solche ein unmittelbares Differentiations-Ergebniss einer Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung, wie die Gleichung in (2) vorhergehender No., sein möge.

Stellen wir die hier gefundenen Resultate in umgekehrter Ordnungsfolge ihrer Entstehung zusammen, so ergiebt sich, als Folge der $n+1$ Gleichungen in (4), dieselbe Zahl folgender Gleichungen:

$$(4')\left\{\begin{aligned}
0 &= \frac{dV}{dy} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_1} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{\omega^n}d^n\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
\frac{df}{dy} &= \frac{dV}{dy_1} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_2} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^{n-1}}d^{n-1}\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
\frac{df}{dy_1} &= \frac{dV}{dy_2} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_3} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_4} - \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{\omega^{n-2}}d^{n-2}\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{df}{dy_{n-3}} &= \frac{dV}{dy_{n-2}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_{n-1}} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
\frac{df}{dy_{n-2}} &= \frac{dV}{dy_{n-1}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_n},\\
\frac{df}{dy_{n-1}} &= \frac{dV}{dy_n}.
\end{aligned}\right.$$

Da die n letzten von diesen Gleichungen die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von f nach $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ sind, und nunmehr auch die Gleichung in (5) (vorige No.) den partiellen Differentialquotienten von f nach x mittels leicht zu vollziehender Operationen durch die bekannte Function V darstellt; so bleibt bloss noch nachzuweisen übrig, dass, wenn der Kürze wegen folgende Gleichungen gesetzt werden:

$$(7)\quad \frac{df}{dx} = X,\quad \frac{df}{dy} = Y,\quad \frac{df}{dy_1} = Y^{(1)},\quad \frac{df}{dy_2} = Y^{(2)},\quad \ldots\quad \frac{df}{dy_{n-1}} = Y^{(n-1)},$$

die lineare Differentialfunction

$$(8)\quad Xdx + Ydy + Y^{(1)}dy_1 + Y^{(2)}dy_2 + \ldots + Y^{(-1)}dy_{n-1}$$

sämmtlichen Bedingungen, welche sie zu einem vollständigen Differential machen, entspreche, sobald bloss die erste der in (4′) zusammengestellten Gleichungen identisch ist. Besagte Bedingungen können aber bekanntlich symbolisch durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$(9)\quad \frac{dY^{(p)}}{dy_k} = \frac{dY^{(k)}}{dy_p}\quad \left\{\begin{matrix}\text{von } p = 0 \text{ bis } p = n-1\\ \text{von } k = 0 \text{ bis } k = n-1\end{matrix}\right\}\quad \text{und}$$

$$(10)\quad \frac{dX}{dy_p} = \frac{dY^{(p)}}{dx}\quad \{\text{von } p = 0 \text{ bis } p = n-1\},$$

wo $Y^{(0)}$ durch Y und y_0 durch y zu ersetzen ist. Daher ist bloss das identische Bestehen aller dieser Bedingungsgleichungen nachzuweisen, indem lediglich die Gleichungen in (4′) und die in (5) als bestehend zum Grunde gelegt werden. Da ferner die Systeme der Gleichungen in (4) und (4′) gegenseitige Folgen zu einander sind, nämlich, wie oben, durch alleinige Zugrundelegung der Gleichungen in (4) die in (4′) gefunden worden sind, so zeigt sich leicht,

dass, bloss diese zum Grunde legend, auch jene gefunden werden können; und da besagter, vorhin erwähnter Nachweis für das System in (4), wenn die in (7) eingeführten Abkürzungen beibehalten werden, leichter als für das System in (4') ist: so werden wir uns auch jenes in (4) aufgestellten Systemes bedienen; wozu wir die nächstfolgende No. bestimmen.

3.

Die Gleichungen in (4) gehen nach Einführung der in (7) angedeuteten Vereinfachungen in folgende über:

$$(4'') \qquad Y^{(n-1)} = \frac{dV}{dy_n}, \qquad Y^{(p-1)} + \frac{1}{\omega} d\cdot Y^{(p)} = \frac{dV}{dy_p}, \qquad \frac{1}{\omega} d\cdot Y = \frac{dV}{dy},$$

wo in der zweiten p alle ganzen Zahlenwerthe von 1 bis $n-1$ bekommen kann, und wo für die gleichen Werthe von p die Bestimmungsgleichung

$$Y^{(p)} = \frac{dV}{dy_{p+1}} - \frac{1}{\omega} d\cdot \frac{dV}{dy_{p+2}} + \frac{1}{\omega^2} d^2 \cdot \frac{dV}{dy_{p+3}} - \ldots \frac{(-1)^{n-p-1}}{\omega^{n-p-1}} d^{n-p-1} \cdot \frac{dV}{dy_n}$$

Statt findet. Vergegenwärtigt man sich die Bedeutung der bis jetzt besprochenen Variabeln, wie auch von ω, so erhält man folgende Gleichungen:

$$y_1 = \frac{1}{\omega} dy, \quad y_2 = \frac{1}{\omega} dy_1, \quad y_3 = \frac{1}{\omega} dy_2, \ldots y_n = \frac{1}{\omega} dy_{n-1},$$

oder auch folgende:

$$y_1 = \frac{1}{\omega} dy, \quad y_2 = \frac{1}{\omega^2} d^2 y, \quad y_3 = \frac{1}{\omega^3} d^3 y, \ldots y_n = \frac{1}{\omega_n} d^n y.$$

Setzt man nun, abkürzend,

$$x = \xi, \quad y = v, \quad dy = v_1, \quad d^2 y = v_2, \quad d^3 y - v_3, \ldots d^n y = v_n,$$

so ergeben sich, wenn U irgend eine Function von $x, y, y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichnet, folgende Gleichungen:

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{dU}{dv} = \frac{dU}{dy}, \qquad \frac{dU}{dv_p} = \frac{1}{\omega^p} \frac{dU}{dy_p},$$

wo in der letztern p alle ganzen Werthe von 1 bis n bekommen kann. Nun bestehen, wenn F irgend eine Function von $\xi, v, v_1, v_2, \ldots v_n$ ist, folgende Umformungsgleichungen (nach dem zweiten Bande meiner Diff. und Int. R., No. 383., Gleichungen 17):

$$\frac{d(d\cdot F)}{d\xi} = d\cdot \frac{dF}{d\xi}, \qquad \frac{d(d\cdot F)}{dv} = d\cdot \frac{dF}{dv},$$

$$\frac{d(d\cdot F)}{dv_p} = d\cdot \frac{dF}{dv_p} + \frac{dF}{dv_{p-1}} \quad \{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n\},$$

wo wir ein *totales* Differential durch $d.$ bezeichnen: folglich hat man auch, wenn U eine wie vorhin festgestellte Function von $x, y, y_1, y_2, \ldots y_n$ ist, folgende Umformungsgleichungen:

$$(11)\qquad \frac{d(d\cdot U)}{dx} = d\cdot\frac{dU}{dx}, \qquad \frac{d(d\cdot U)}{dy} = d\cdot\frac{dU}{dy},$$

$$(12)\qquad \frac{d(d\cdot U)}{dy_p} = d\cdot\frac{dU}{dy_p} + \omega\frac{dU}{dy_{p-1}} \;\{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n\},$$

welche wir bei dem zu gebenden Nachweise benutzen werden.

I. Differentiirt man die zweite der Gleichungen in (4″) partiell nach y, so erhält man vermöge der zweiten Umformungsgleichung in (11) folgende:

$$\frac{dY^{(p-1)}}{dy} + \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dY^{(p)}}{dy} = \frac{d^2V}{dy\,dy_p}$$

Die dritte der Gleichungen in (4″), nach y_p partiell differentiirt, giebt, mit Zuziehung der Umformungsgleichung in (12), folgende:

$$\frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dY}{dy_p} + \frac{dY}{dy_{p-1}} = \frac{d^2V}{dy_p\,dy}.$$

Demnach erhält man durch Subtraction dieser von der vorhergehenden Gleichung:

$$(\delta)\qquad \frac{dY^{(p-1)}}{dy} - \frac{dY}{dy_{p-1}} + \frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{dY^{(p)}}{dy} - \frac{dY}{dy_p}\right] = 0.$$

Wird ferner die erste der Gleichungen in (4″) nach y und die letzte nach y_n partiell differentiirt, so stellt sich, wenn diese Differentiationen mit Hülfe der in (12) aufgestellten Umformungsgleichungen vollzogen werden, als Unterschied folgende Gleichung dar:

$$\frac{dY^{(n-1)}}{dy} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dY}{dy_n} - \frac{dY}{dy_{n-1}} = 0.$$

Nach der Voraussetzung ist aber Y unabhängig von y_n: also hat man statt der letzten Gleichung folgende:

$$\frac{dY^{(n-1)}}{dy} - \frac{dY}{dy_{n-}} = 0.$$

Wird demnach in der obigen Gleichung (δ) statt p nach und nach $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... 3, 2 gesetzt, so ergiebt sich, mit Beachtung der eben gefundenen Gleichung, das System von Gleichungen, von der Form

$$(\varepsilon)\qquad \frac{dY^{(p)}}{dy} = \frac{dY}{dy_p} \;\{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\}$$

als begründet und dadurch das identische Bestehen einer Abtheilung des in (9) enthaltenen Systems, nämlich derjenigen, welche der Annahme $k=0$ entspricht, als Folge der Gleichungen in (4″) dargethan.

Um die übrigen Abtheilungen des in (9) enthaltenen Systems von Gleichungen ebenfalls als Folgen der in (4″) enthaltenen Gleichungen darzuthun, differentiire man die zweite Gleichung des letzgenannten Systems partiell nach y_k, wo k eine der ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ sein kann, und vollziehe diese Differentiation mit Hülfe der Umformungsgleichung in (12). Dieses giebt

$$\frac{dY^{(p-1)}}{dy_k}+\frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dY^{(p)}}{dy_k}+\frac{dY^{(p)}}{dy_{k-1}}=\frac{d^2V}{dy_p\,dy_k}.$$

Der Ausdruck rechterhand ist hier in Beziehung auf die beiden allgemeinen Zahlen p und k symmetrisch; daher gilt ein Gleiches auch von dem Ausdrucke linkerhand des Gleichheitszeichens und es findet in Folge dieser Bemerkung auch die Gleichung

$$\frac{dY^{(p-1)}}{dy_k}+\frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dY^{(p)}}{dy_k}+\frac{dY^{(p)}}{dy_{k-1}}=\frac{dY^{(k-1)}}{dy_p}+\frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dY^{(k)}}{dy_p}+\frac{dY^{(k)}}{dy_{p-1}}.$$

Statt, oder auch folgende:

$$(\zeta)\qquad \frac{dY^{(p-1)}}{dy_k}-\frac{dY^{(k)}}{dy_{p-1}}+\frac{dY^{(p)}}{dy_{k-1}}-\frac{dY^{(k-1)}}{dy_p}+\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{dY^{(p)}}{dy_k}-\frac{dY^{(k)}}{dy_p}\right]=0,$$

in welcher sowohl p als k alle ganzen Zahlenwerthe von 1 bis $n-1$ bekommen kann.

Wird ferner die erste der Gleichungen in (4″) nach y_p und die zweite nach y_n partiell differentiirt, und bedenkt man dabei, dass $Y^{(p-1)}$, sowohl wie $Y^{(p)}$, von y_n unabhängig ist, so stellt sich, als Unterschied beider Ergebnisse, folgende Gleichung heraus:

$$(\eta)\qquad \frac{dY^{(n-1)}}{dy_p}=\frac{dY^{(p)}}{dy^{n-1}}\quad\{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\}.$$

Mittels der so eben gefundenen zwei Gleichungen in (ζ) und (η) ist man zuerst, mit Zuziehung der oben gefundenen Gleichung (ε), die Gleichung

$$\frac{dY^{(p)}}{dy_1}=\frac{dY^{(1)}}{dy_p}\quad\{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\}$$

zu begründen im Stande; hierauf mit Zuziehung dieser die folgende:

$$\frac{dY^{(p)}}{dy_2}=\frac{dY^{(2)}}{dy_p}\quad\{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\};$$

mit Zuziehung dieser die folgende:



$$\frac{dY^{(p)}}{dy_3} = \frac{dY^{(3)}}{dy_p} \quad \{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\}$$

u. s. w., bis man zuletzt auf die Gültigkeit der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dY^{(p)}}{dy_k} = \frac{dY^{(k)}}{dy_p} \quad \begin{Bmatrix}\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1 \\ \text{von } k=1 \text{ bis } k=n-1\end{Bmatrix}$$

geführt wird, welche, in Vereinigung mit der in (ε) zusammengestellten Abtheilung, das in (9) angedeutete System von Gleichungen umfasst.

Zur Bestätigung dieser Behauptung wollen wir zeigen, dass, wenn man eine Gleichung von der Form

$$\frac{dY^{(p)}}{dy_\mu} = \frac{dY^{(\mu)}}{dy_p} \quad \{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\},$$

wo μ entweder gleich Null ist, oder irgend einen bestimmten ganzen Zahlenwerth von 1 bis $n-2$ hat, zum Grunde legt, dieselbe Gleichung auch noch für $\mu+1$ bestehe.

Zu diesem Behufe setzen wir in der Gleichung (ζ) $k=\mu+1$. Dadurch geht sie vermöge der eben zu Grunde gelegten Gleichung in

$$\frac{dY^{(n-1)}}{dy_{\mu+1}} - \frac{dY^{(\mu+1)}}{dy_{p-1}} + \frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{dY^{(p)}}{dy_{\mu+1}} - \frac{dY^{(\mu+1)}}{dy_p}\right] = 0$$

über, wo man für p alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ setzen kann. Ferner geht die Gleichung (η), wenn in derselben $p=\mu+1$ angenommen wird, in

$$\frac{dY^{(n-1)}}{dy_{\mu+1}} = \frac{dY^{(\mu+1)}}{dy_{n-1}}$$

über. Berücksichtiget man nun dieses Ergebniss und setzt in der vorausgehenden Gleichung $p=n-1$, berücksichtiget dann das dadurch gefundene Ergebniss und setzt in der nämlichen vorausgehenden Gleichung $p=n-2$, berücksichtiget ferner auch dieses Ergebniss und setzt abermals in der vorausgehenden Gleichung $p=n-3$ u. s. w.; so gelangt man zuletzt auf die zu beweisende Gleichung:

$$\frac{dY^{(p)}}{dy_{\mu+1}} = \frac{dY^{(\mu+1)}}{dy_p} \quad \{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\},$$

welches dann, wie bereits oben gedacht, das System sämmtlicher in (9) enthaltenen Gleichungen, als Folge der Gleichungen in (4''), oder der in (4), oder endlich auch der in (4') giebt.

II. Beim Nachweise des Bestandhabens sämmtlicher in (10) enthaltenen Gleichungen, wenn sowohl die Gleichungen in (4''), wie auch die Glei-

chung in (5), und in Folge dieser auch die in (6) unterlegt werden, nehmen wir die letzgenannte, geben ihr vermöge der erstern Vereinfachungsgleichung in (7) folgende Form:

$$(6') \quad \frac{1}{\omega} d \cdot X = \frac{dV}{dx}$$

und verfahren nun auf ähnliche Weise, wie oben bei der Entwickelung der Gleichung in (ε).

Differentiirt man nämlich die zweite der Gleichungen in (4″) partiell nach x, berücksichtiget aber dabei die erste der in (11) aufgestellten Umformungsgleichungen, so erhält man:

$$\frac{dY^{(p-1)}}{dx} + \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{dY^{(p)}}{dx} = \frac{d^2 V}{dx\, dy_p} \quad \{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\}.$$

Wird die vorhergehende Gleicung in (6′) mit Hülfe der Umformungsgleichung (12) partiell nach y_p differentiirt, so erhält man:

$$\frac{1}{\omega} d \cdot \frac{dX}{dy_p} + \frac{dX}{dy_{p-1}} = \frac{d^2 V}{dx\, dy_p} \quad \{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\};$$

daher ergiebt sich, durch Subtraction dieser beiden Ausdrücke, folgende Gleichung:

$$(\vartheta) \quad \frac{dY^{(p-1)}}{dx} - \frac{dX}{dy_{p-1}} + \frac{1}{\omega} d \cdot \left[\frac{dY^{(p)}}{dx} - \frac{dX}{dy_p}\right] = 0 \quad \{\text{von } p=1 \text{ bis } p=n-1\}.$$

Wird ferner die erste der Gleichungen in (4″) nach x und die obige in (6′) nach y_n partiell differentiirt, so erhält man, als Unterschied beider Ergebnisse, folgende Gleichung:

$$\frac{dY^{(n-1)}}{dx} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{dX}{dy_n} - \frac{dX}{dy_{n-1}} = 0,$$

oder auch, weil X von y_n unabhängig ist, folgende:

$$\frac{dY^{(n-1)}}{dx} = \frac{dX}{dy_{n-1}}.$$

Setzen wir in der Gleichung (ϑ) $p=n-1$ und beachten die eben aufgestellte Gleichung, setzen dann in derselben Gleichung (ϑ) $p=n-2$ und beachten das unmittelbar erwähnte Ergebniss, setzen mit Beachtung des letzten Ergebnisses in derselben Gleichung (ϑ) $p=n-3$ und fahren auf diese Weise fort, mit Zuziehung des jedesmaligen Ergebnisses in besagter Gleichung (ϑ) statt p immer kleinere und kleinere Zahlenwerthe zu setzen, so gelangen wir zuletzt auf folgende Gleichung:

$$\frac{dY^{(1)}}{dx} = \frac{dX}{dy_1}.$$

Wird nun zum Schlusse in derselben Gleichung (ϑ) $p = 1$ gesetzt, so erhält man, mit Beachtung der eben aufgestellten Gleichung, folgende:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dX}{dy}.$$

Berücksichtigen wir alle diese Ergebnisse, so stellt sich die allgemeine Gleichung in (10) gleichfalls als Folge der Gleichungen in (4'') und der Gleichung in (5) heraus; wodurch denn das Ausgangs vorhergehender No. gesteckte Ziel erreicht ist.

4.

Zur Uebersicht der bis jetzt begründeten Ergebnisse lassen wir sie hier in gedrängter Kürze folgen.

Damit eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung von der Form

$$\text{(A)} \qquad V = y_n \varphi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}) + \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}) = 0,$$

ein einmaliges und unmittelbares Differentiations-Ergebniss einer Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung von der Form

$$\text{(B)} \qquad a = f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1})$$

sei, wo a eine Constante ist, die weder in der Function f rechterhand in dieser letzten Gleichung, noch in der vorgelegten Differentialgleichung (A) vorkommt, ist nur allein nothwendig, dass die Function V der Gleichung

$$\text{(C)} \qquad 0 = \frac{dV}{dy} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{dV}{dy_1} + \frac{1}{\omega^2} d^2 \cdot \frac{dV}{dy_2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{\omega^n} d^n \cdot \frac{dV}{dy_n}$$

identisch genüge, in welcher der Kürze wegen ω statt dx gesetzt ist, und in welcher ein Ausdruck wie der folgende

$$d^k \cdot \frac{dV}{dy_k}$$

das totale $k$te Differential des partiellen Differentialquotienten von V nach y_k bezeichnet, bei welcher totalen Differentiation jedoch das Differential von x, nämlich dx oder ω, als Constante anzusehen ist.

Beim Nichteintreffen der Bedingungsgleichung (C) kann die Differentialgleichung in (A) nicht durch unmittelbare einmalige Differentiation einer Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung entstanden sein; welche letztere man sich jedoch jedesmal unter der in (B) dargestellten Form vorstellen kann. Beim Eintreffen der Bedingungsgleichung hingegen ist die so eben verneinte Annahme nicht nur zulässlich, sondern die durch f in der Gleichung (B) an-

gedeutete Function von $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ ist alsdann durch eine Reihe auf einander folgender einfacher Quadraturen herzustellen möglich. Zuerst werden nämlich die n Grössen $Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots Y^{(n-1)}$ mittelst folgender Gleichungen bestimmt:

$$(D)\quad\begin{cases} Y = \frac{dV}{dy_1} - \frac{1}{\omega}d.\frac{dV}{dy_2} + \frac{1}{\omega^2}d^2.\frac{dV}{dy_3} - \dots \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^{n-1}}d^{n-1}.\frac{dV}{dy_n}, \\ Y^{(1)} = \frac{dV}{dy_2} - \frac{1}{\omega}d.\frac{dV}{dy_3} + \frac{1}{\omega^2}d^2.\frac{dV}{dy_4} - \dots \frac{(-1)^{n-2}}{\omega^{n-2}}d^{n-2}.\frac{dV}{dy_n}, \\ Y^{(2)} = \frac{dV}{dy_3} - \frac{1}{\omega}d.\frac{dV}{dy_4} + \frac{1}{\omega^2}d^2.\frac{dV}{dy_5} - \dots \frac{(-1)^{n-3}}{\omega^{n-3}}d^{n-3}.\frac{dV}{dy_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y^{(n-1)} = \frac{dV}{dy^{n-1}} - \frac{1}{\omega}d.\frac{dV}{dy_n}, \\ Y^{(n-1)} = \frac{dV}{dy_n}, \end{cases}$$

wo ω dieselbe Bedeutung hat, wie oben, und wo ein Ausdruck wie der folgende:

$$d^k.\frac{dV}{dy_p}$$

das $k$te totale Differential des partiellen Differentialquotienten von V nach y_p bezeichnet; wo jedoch das Differential von x, nämlich dx oder ω, als eine Constante zu behandeln ist.

Nachdem die Bestimmungen mittels der in (D) aufgestellten Gleichungen geschehen sind, bestimme man noch eine Grösse X durch folgende Gleichung:

$$(E)\qquad X = V - \{y_1 Y + y_2 Y^{(1)} + y_3 Y^{(2)} + \dots + y_n Y^{(n-1)}\}.$$

Ist dieses geschehen, so wird in der Gleichung

$$(F)\qquad d.f = Xdx + Ydy + Y^{(1)}dy_1 + Y^{(2)}dy_2 + \dots + Y^{(n-1)}dy^{n-1}$$

der Ausdruck rechterhand eine vollständige Differentialfunction der von einander unabhängig gedachten Grössen $x, y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ sein, welche (nach den Mittheilungen im zweiten Bande meiner Diff. und Int. R. No. 285.) mittels einer Reihe einfacher Quadraturen zur Kenntniss der derselben entsprechenden Function führt. Diese Function wird die rechterhand in der Gleichung (B) durch f angedeutete sein; so dass alsdann diese Gleichung (B) die unmittelbar vorhergehende vollständige Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung $n$ter Ordnung in (A) geben wird.

5.

Bevor wir zur weitern Entwickelung der so eben zusammengestellten

allgemeinen Ergebnisse übergehen, wollen wir selbige zuerst noch für einige besondere Werthe von n ausführen, wozu die vorliegende No. bestimmt ist.

I. Wenn $n=1$ ist, wenn nämlich die Differentialgleichung erster Ordnung

$$V = y_1\varphi(x,y) + \psi(x,y)$$

gegeben ist, so zieht man aus derselben folgende Bestimmungen:

$$\frac{dV}{dy} = y_1\frac{d\varphi(x,y)}{dy} + \frac{d\psi(x,y)}{dy}, \qquad \frac{dV}{dy_1} = \varphi(x,y);$$

folglich geht die allgemeine Bedingungsgleichung in (C) jetzt in

$$0 = y_1\frac{d\varphi(x,y)}{dy} + \frac{d\psi(x,y)}{dy} - \frac{d\varphi(x,y)}{dx} - y_1\frac{d\varphi(x,y)}{dy},$$

oder auch in folgende bekannte Gleichung über:

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \frac{d\psi(x,y)}{dy}.$$

Beim identischen Eintreffen dieser Gleichung geben die erste der Gleichungen in (D) und die Gleichung in (E) folgende Bestimmungen:

$$Y = \varphi(x,y), \quad X = \psi(x,y),$$

und die Gleichung in (F), welche jetzt in folgende übergeht:

$$d.f = \psi(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy,$$

wird von der Art sein, dass der Ausdruck rechterhand eine vollständige Differentialfunction von x und y ist, welche, integrirt und das Integral durch $f(x,y)$ ausgedrückt, die vollständige Integralgleichung

$$a = f(x,y)$$

der vorgelegten Differentialgleichung erster Ordnung giebt, in welcher a die Integrations-Constante ist.

II. Für $n=2$, also für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\alpha) \qquad V = y_2\varphi(x,y,y_1) + \psi(x,y,y_1) = 0,$$

fanden sich die Bestimmungen:

$$\frac{dV}{dy} = y_2\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dy}, \quad \frac{dV}{dy_1} = y_2\frac{d\varphi}{dy_1} + \frac{d\psi}{dy_1} \text{ und } \frac{dV}{dy_2} = \varphi,$$

wo der Kürze wegen nur die Zeichen der Functionen gesetzt sind. Da man ferner durch totales Differentiiren die Gleichung

$$\frac{1}{\omega}d.\frac{dV}{dy_2} = \frac{d\varphi}{dx} + y_1\frac{d\varphi}{dy} + y_2\frac{d\varphi}{dy_1}$$

erhält, so ist auch

$$\frac{dV}{dy_1} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{dV}{dy_2} = \frac{d\psi}{dy_1} - \frac{d\psi}{dx} - y_1 \frac{d\varphi}{dy};$$

also stellt sich, wenn der Kürze wegen

$$(\beta) \quad \varphi' = \frac{d\psi}{dy_1} - \frac{d\varphi}{dx} - y_1 \frac{d\varphi}{dy}$$

gesetzt wird, wo also φ' eine Function von x, y und y_1 ist, die zu realisirende Bedingungsgleichung (C), auf den vorliegenden Fall angewendet, folgendermassen dar:

$$y_2 \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dy} - \frac{1}{\omega} d \cdot \varphi' = 0,$$

oder auch, nach vollbrachter totaler Differentiation von φ', folgendermassen:

$$y_2 \left(\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\varphi'}{dy_1} \right) + \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi'}{dx} - y_1 \frac{d\varphi'}{dy} = 0.$$

Es sind aber die durch φ und φ' bezeichneten Functionen von y_2 unabhängig; also kann diese Gleichung nur insofern identisch bestehen, als die zwei Gleichungen

$$(\gamma) \quad \frac{d\varphi'}{dy_1} = \frac{d\varphi}{dy} \text{ und } \frac{d\varphi'}{dx} + y_1 \frac{d\varphi'}{dy} = \frac{d\psi}{dy}$$

jede für sich identisch Bestand haben; wo φ' durch die Gleichung (β) von den Functionen φ und ψ in Abhängigkeit gebracht ist.

Werden diese beiden Bedingungsgleichungen, die auch *Lagrange* an dem im Eingange citirten Orte aufstellt, identisch erfüllt, so ergeben sich, mit den vorhin aufgestellten Bestimmungen der verschiedenen Differentiations-Ergebnisse von V, nach den zwei ersten der Gleichungen in (D) und nach der Gleichung in (E), folgende Bestimmungen:

$$Y = \varphi', \quad Y = \varphi, \quad X = \psi - y_1 \varphi',$$

vermöge welcher die allgemeine Gleichung (F) in

$$(\delta) \quad d.f = (\psi - y_1 \varphi') dx + \varphi' dy + \varphi dy_1$$

übergeht; wo beim Eintreffen der obigen zwei Bedingungsgleichungen in (γ) der Differentialausdruck rechterhand eine vollständige Differentialfunction der als von einander unabhängig betrachteten Variabeln x, y und y_1 ist, welcher dann, vollständig integrirt, eine Function von x, y, y_1 giebt, die, durch $f(x, y, y_1)$ ausgedrückt, die Gleichung

$$(\varepsilon) \quad a = f(x, y, y_1)$$

liefert, in welcher a die Integrationsconstante ist. Sie ist die vollständige, unmittelbar vorhergehende Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung (α).

III. Für die dritte besondere Annahme $n=3$ hat man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(\alpha') \quad V = y_3\varphi(x, y, y_1, y_2) + \psi(x, y, y_1, y_2) = 0,$$

aus welcher man, wenn man der Kürze wegen φ und ψ statt $\varphi(x, y, y_1, y_2)$ und $\psi(x, y, y_1, y_2)$ setzt, zunächst folgende Bestimmungsgleichungen zieht:

$$\frac{dV}{dy} = y_3\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dy}, \quad \frac{dV}{dy_1} = y_3\frac{d\varphi}{dy_1} + \frac{d\psi}{dy_1}, \quad \frac{dV}{dy_2} = y_3\frac{d\varphi}{dy_2} + \frac{d\psi}{dy_2}, \quad \frac{dV}{dy_3} = \psi.$$

Wird hier der Kürze wegen

$$\varphi' = \frac{d\psi}{dy_2} - \frac{d\varphi}{dx} - y_1\frac{d\varphi}{dy} - y_2\frac{d\varphi}{dy_1}$$

gesetzt, so ergiebt sich aus den beiden letzten der vorhergehenden Gleichungen folgende:

$$\frac{dV}{dy_2} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_3} = \varphi'.$$

Aus diesen und den drittletzten vorhergehenden Gleichungen findet sich, wenn man abermals der Kürze wegen die Gleichungen

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dy_1} - \frac{d\varphi'}{dy_2} \text{ und } \varphi'' = \frac{d\psi}{dy_1} - \frac{d\varphi'}{dx} - y_1\frac{d\varphi'}{dy} - y_2\frac{d\varphi'}{dy_1},$$

setzt (wo λ sowohl als φ' und φ'' nur Functionen von x, y, y_1 und y_2 sind), folgende Gleichung:

$$\frac{dV}{dy_1} - \frac{1}{\omega}d\cdot\frac{dV}{dy_2} + \frac{1}{\omega^2}d^2\cdot\frac{dV}{dy_3} = \varphi'' + \lambda y_3.$$

Berücksichtiget man endlich diese und die erste der schon zweimal erwähnten vorhergehenden Gleichungen, so stellt sich die zu realisirende Bedingungsgleichung (C) jetzt folgendermassen dar:

$$y_3\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dy} - \frac{1}{\omega}d\cdot\varphi'' - \frac{1}{\omega}d\cdot(\lambda y_3) = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung erhellet, dass zur identischen Realisirung derselben vorerst $\lambda=0$ sein muss, indem solche sonst von dem Gliede mit y_4 nicht befreiet werden kann. **Dies vorausgesetzt, stellt sich die Bedingungsgleichung auch folgendermaassen dar:**

$$y_2\left(\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\varphi''}{dy_2}\right)+\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi''}{dx}-y_1\frac{d\varphi''}{dy}-y_2\frac{d\varphi''}{dy_1}=0;$$

welche Gleichung aus ähnlichem Grunde wie der, aus welchem wir $\lambda=0$ setzten, auf die zwei Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\varphi''}{dy_2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi''}{dx}-y_1\frac{d\varphi''}{dy}-y_2\frac{d\varphi''}{dy_1}=0,$$

führt, welche, mit $\lambda=0$ vereinigt, folgendes System zugleich bestehender Bedingungsgleichungen geben:

$$\frac{d\varphi}{dy_1}=\frac{d\varphi'}{dy_2},\qquad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi''}{dy_2},\qquad \frac{d\psi}{dy}=\frac{d\varphi''}{dx}+y_1\frac{d\varphi''}{dy}+y_2\frac{d\varphi''}{dy_2};$$

wo der Kürze wegen

$$(\beta')\quad \begin{cases} \varphi'=\dfrac{d\psi}{dy_2}-\dfrac{d\varphi}{dx}-y_1\dfrac{d\varphi}{dy}-y_2\dfrac{d\varphi}{dy_1}, \\ \varphi''=\dfrac{d\psi}{dy_1}-\dfrac{d\varphi'}{dx}-y_1\dfrac{d\varphi'}{dy}-y_2\dfrac{d\varphi'}{dy_1} \end{cases}$$

gesetzt ist.

Von diesen drei Bedingungsgleichungen ist eine, nämlich die zweite, völlig überflüssig, indem sie, wie sogleich gezeigt werden wird, nur eine Folge der ersten des Systems ist. Wird nämlich der partielle Differentialquotient von φ' nach y_2 hergestellt und dabei die erste der drei Bedingungsgleichungen berücksichtiget, so erhält man

$$\frac{d\varphi''}{dy_2}=\frac{d^2\psi}{dy_1dy_2}-\frac{d^2\varphi}{dxdy_1}-y_1\frac{d^2\varphi}{dydy_1}-y_2\frac{d^2\varphi}{dy_1^2}-\frac{d\varphi'}{dy_1}.$$

Wird ferner φ' partiell nach y_1 differentiirt, so erhält man

$$\frac{d\varphi'}{dy_1}=\frac{d^2\psi}{dy_1dy_2}-\frac{d^2\varphi}{dxdy_1}-y_1\frac{d^2\varphi}{dydy_1}-y_2\frac{d^2\varphi}{dy_1^2}-\frac{d\varphi}{dy}.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so ergiebt sich

$$\frac{d\varphi''}{dy_2}=\frac{d\varphi}{dy};$$

welches die verlangte zweite der vorigen drei Bedingungsgleichungen ist, die wir als Folge der ersten derselben fanden.

Dieses nun vorausgesetzt, stellen sich die beiden Gleichungen

$$(\gamma')\quad \frac{d\varphi'}{dy_2}=\frac{d\varphi}{dy_1} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi''}{dx}+y_1\frac{d\varphi''}{dy}+y_2\frac{d\varphi''}{dy_1}=\frac{d\psi}{dy},$$

als die zu realisirenden Bedingungen dar, damit die vorgelegte Differentialgleichung dritter Ordnung in (α'), das Ergebniss der unmittelbaren Differen-

tiation einer nach der allgemeinen Constante aufgelöseten Differentialgleichung zweiter Ordnung sei. Zur Kenntniss der letztern gelangt man, wenn mit Hülfe der oben aufgestellten Bestimmungsgleichungen aus den drei ersten allgemeinen Gleichungen in (D) und der Gleichung in (E) die Coefficienten Y, $Y^{(1)}$ $Y^{(2)}$ und X bestimmt werden. Es findet sich nämlich

$$Y = \varphi'', \quad Y^{(1)} = \varphi', \quad Y^{(2)} = \varphi, \quad X = \psi - y_1\varphi'' - y_2\varphi',$$

und nach Einführung dieser Ausdrücke in die aus der allgemeinen (F) entsprungenen Gleichung

$$(\delta') \qquad d.f = (\psi - y_1\varphi'' - y_2\varphi')dx + \varphi''dy + \varphi'dy_1 + \varphi dy_2,$$

in welcher der Ausdruck rechterhand eine vollständige Differentialfunction der von einander unabhängig angenommenen Variabeln x, y, y_1, y_2 ist, erhält man, wenn die Gleichung vollständig integrirt wird, die jetzt in Rede stehende Integralgleichung

$$(\varepsilon') \qquad a = f(x, y, y_1, y_2),$$

in welcher a eine willkührliche Constante und $f(x, y, y_1, y_2)$ eine Function von x, y, y_1, y_2 ist, deren totales Differential den Ausdruck rechterhand in (δ') giebt.

6.

Obwohl wir von der Richtigkeit der in der vorhergehenden No. gemachten Aussagen nach der in No. 3. allgemein gehaltenen Beweisführung auf's Vollkommenste überzeugt sein dürfen, namentlich, was die Bedingungsgleichungen betrifft, welche erfüllt werden müssen, damit die entsprechenden linearen Differentialfunctionen, eben wie diejenige rechterhand in (δ) und (δ'), vollständige Differentiale beziehungsweise von Functionen der Variabeln x, y, y_1 und x, y, y_1, y_2 sein mögen: so erachten wir es doch für nicht überflüssig, den in III. vorhergehender No. vorgeführten besondern Fall nochmals und besonders zu besprechen. In diesem besondern Falle fand sich nämlich, dass die lineare Differentialfunction rechterhand in der Gleichung (δ') der vier Variabeln x, y, y_1, y_2 ein totales Differential einer Function derselben Variabeln sein wird, wenn lediglich die beiden in (γ') daselbst zusammengestellten Bedingungsgleichungen bestehen. Andrerseits ist aber bekannt (s. meine Diff. und Int. R., Band 2., No. 284.), dass die sechs Bedingungsgleichungen

$$(\gamma'_1)\quad\begin{cases} \frac{d\psi}{dy}-y_1\frac{d\varphi''}{dy}-y_2\frac{d\varphi'}{dy}=\frac{d\varphi''}{dx}, \\ -\varphi''+\frac{d\psi}{dy_1}-y_1\frac{d\varphi''}{dy_1}-y_2\frac{d\varphi'}{dy_1}=\frac{d\varphi'}{dx}, \\ -\varphi'+\frac{d\psi}{dy_2}-y_1\frac{d\varphi''}{dy_2}-y_2\frac{d\varphi'}{dy_2}=\frac{d\varphi}{dx}, \\ \frac{d\varphi''}{dy_1}=\frac{d\varphi'}{dy},\quad \frac{d\varphi''}{dy_2}=\frac{d\varphi}{dy},\quad \frac{d\varphi'}{dy_2}=\frac{d\varphi}{dy_1}, \end{cases}$$

als identisch bestehend erkannt werden müssen, um zu der oben erwähnten Aussage, den Differential-Ausdruck rechterhand in (δ') betreffend, berechtigt zu sein. Daher dürfte es nun, um diese beiden Aussagen in Einklang zu bringen, nicht uninteressant sein, zu zeigen, dass sämmtliche so eben aufgestellte sechs Bedingungsgleichungen aus den zwei in (γ') aufgestellten Bedingungsgleichungen als Folgen hervorgehen. Dieses soll in der vorliegenden No. geschehen.

Zuerst stimmt offenbar die letzte der Gleichungen in (γ_1') mit der ersten in (γ') überein, so dass wir uns mit derselben nicht weiter zu befassen haben.

Zweitens ist bereits in der vorhergehenden No. die zweitletzte der Gleichungen in (γ'), als Folge der unmittelbar besprochenen dargethan; daher auch von diesen abgesehen werden darf.

Die drittletzte der Gleichungen in (γ'_1) wird auf folgende Weise aus den Gleichungen in (γ') gezogen. Die zweite dieser Gleichungen kann nämlich folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\frac{d\psi}{dy}=\frac{1}{\omega}d\cdot\varphi''-y_2\frac{d\varphi''}{dy_2},$$

oder auch, vermöge des unmittelbar vorher Besprochenen, wie folgt:

$$\frac{d\psi}{dy}=\frac{1}{\omega}d\cdot\varphi''-y_2\frac{d\varphi}{dy},$$

oder endlich, die Bedeutung von V aus dem Falle III. vorhergehender No. beachtend, folgendermassen:

$$\frac{dV}{dy}=\frac{1}{\omega}d\cdot\varphi''.$$

Wird ferner die erste der Gleichungen in (β') (vorige No.) beachtet, so findet sich aus derselben

$$\frac{d\psi}{dy_2}=\varphi'+\frac{1}{\omega}d\cdot\varphi-y_2\frac{d\varphi}{dy_2},$$

oder auch, beachtend dieselbe Function V, die Gleichung

$$\frac{dV}{dy_2} = \varphi' + \frac{1}{\omega} d \cdot \varphi.$$

Wird nun die vorige, $\frac{dV}{dy}$ darstellende Gleichung partiell nach y_2 und die so eben aufgestellte partiell nach y differentiirt, so erweiset sich, als Unterschied beider Ergebnisse, folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\omega} d \cdot \frac{d(d \cdot \varphi'')}{dy_2} - \frac{d\varphi'}{dy} - \frac{1}{\omega} \frac{d(d \cdot \varphi)}{dy} = 0.$$

Vollzieht man die angedeuteten partiellen Differentiationen von $d \cdot \varphi''$ und $d \cdot \varphi$ nach den allgemeinen Umformungsgleichungen in (11) und (12) (No. 3.), so geht die eben aufgestellte Gleichung in

$$\frac{1}{\omega} d \cdot \frac{d\varphi''}{dy_2} + \frac{d\varphi''}{dy_1} - \frac{d\varphi'}{dy} - \frac{1}{\omega} d \cdot \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

oder auch in

$$\frac{d\varphi''}{dy_1} - \frac{d\varphi'}{dy} + \frac{1}{\omega} d \cdot \left[\frac{d\varphi''}{dy_2} - \frac{d\varphi}{dy}\right] = 0$$

über. Wird endlich die zweitletzte der Gleichungen in (γ'_1) berücksichtiget, die wir bereits als Folge der ersten der Gleichungen in (γ') nachgewiesen haben, so stellt sich die Gleichung

$$\frac{d\varphi''}{dy} = \frac{d\varphi'}{dy}$$

heraus; woraus, wie es sein sollte, die drittletzte der Gleichungen in (γ'_1) als Folge des identischen Bestandhabens der Gleichungen in (γ') erkannt wird.

Viertens stellt sich die viertletzte Gleichung in dem System (γ'_1) als Folge der beiden letzten besagten Systeme heraus, wenn in jener φ' nach der ersten der Gleichungen in (β') ersetzt wird.

Wenn, fünftens, in der zweiten der Gleichungen des Systems (γ'_1) die Function φ'' nach der zweiten der Gleichungen in (β') ersetzt wird, so geht solche, mit Beachtung der bereits nachgewiesenen drittletzten Gleichung des Systems (γ'_1), in die identische Gleichung $\frac{d\varphi'}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx}$ über; daher auch diese als Folge der Gleichungen in (γ') anzusehen ist.

Wird endlich, sechstens, in der ersten Gleichung des Systems (γ'_1) der partielle Differentialquotient $\frac{d\varphi'}{dy}$ nach der drittletzten Gleichung desselben Systems durch den Differential-Coefficienten $\frac{d\varphi''}{dy_1}$ ersetzt, so ist solche mit

der zweiten der Gleichungen in (γ') durchaus einerlei; daher erscheint auch diese als Folge der Gleichungen in (γ').

Alles dieses vorausgesetzt, zeigen sich in der That sämmtliche Gleichungen in (γ'_1) als Folge derjenigen in (γ'); so dass, wenn diese als identisch bestehend erkannt werden, auch jene es sein müssen, und in welchem Falle dann die lineare Differentialfunction rechterhand in der Gleichung (δ^V) nothwendig das totale Differential einer Function von x, y, y_1, y_2 ist.

7.

In der zweitvorhergehenden No. haben wir die allgemeinen Ergebnisse der derselben vorausgeschickten No. für die besondern Fälle $n=1$, $n=2$ und $n=3$ entwickelt und auf ihre eigentlichen Endformen zurückgebracht. Verfährt man auf gleiche Weise, wenn n nicht specialisirt wird, sondern irgend eine beliebige ganze und positive Zahl sein soll, so gelangt man auf ganz ähnliche Resultate wie am genannten Orte. Ohne uns mit deren *Ableitung* besonders zu befassen, welche nach den obigen Mittheilungen in den besondern Fällen überflüssig sein dürfte, theilen wir sie hier bloss einfach mit; und zwar zunächst unmittelbar, wie wir sie erhalten haben.

Wenn die Differentialgleichung $n$ter Ordnung von der Form

$$\text{(a)} \qquad V = y_n\varphi + \psi$$

gegeben ist, wo φ und ψ Functionen der Variabeln

$$x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_{n-1}$$

sind, und man der Kürze wegen folgende Gleichungen setzt:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \varphi^{(1)} = \dfrac{d\psi}{dy_{n-1}} - \dfrac{d\varphi}{dx} - y_1\dfrac{d\varphi}{dy} - y_2\dfrac{d\varphi}{dy_1} - \ldots - y_{n-1}\dfrac{d\varphi}{dy_{n-2}}, \\ \varphi^{(2)} = \dfrac{d\psi}{dy_{n-2}} - \dfrac{d\varphi^{(1)}}{dx} - y_1\dfrac{d\varphi^{(1)}}{dy} - y_2\dfrac{d\varphi^{(1)}}{dy_1} - \ldots - y_{n-1}\dfrac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-2}}, \\ \varphi^{(3)} = \dfrac{d\psi}{dy_{n-3}} - \dfrac{d\varphi^{(2)}}{dx} - y_1\dfrac{d\varphi^{(2)}}{dy} - y_2\dfrac{d\varphi^{(2)}}{dy_1} - \ldots - y_{n-2}\dfrac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(k)} = \dfrac{d\psi}{dy_{n-k}} - \dfrac{d\varphi^{(k-1)}}{dx} - y_1\dfrac{d\varphi^{(k-1)}}{dy} - y_2\dfrac{d\varphi^{(k-1)}}{dy_1} - \ldots - y_{n-1}\dfrac{d\varphi^{(k-1)}}{dy_{n-2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-2)} = \dfrac{d\psi}{dy_2} - \dfrac{d\varphi^{(n-3)}}{dx} - y_1\dfrac{d\varphi^{(n-3)}}{dy} - y_2\dfrac{d\varphi^{(n-3)}}{dy_1} - \ldots - y_{n-1}\dfrac{d\varphi^{(n-3)}}{dy_{n-2}}, \\ \varphi^{(n-1)} = \dfrac{d\psi}{dy_1} - \dfrac{d\varphi^{(n-2)}}{dx} - y_1\dfrac{d\varphi^{(n-2)}}{dy} - y_2\dfrac{d\varphi^{(n-2)}}{dy_1} - \ldots - y_{n-1}\dfrac{d\varphi^{(n-2)}}{dy_{n-2}}, \end{cases}$$

so wird die Differentialgleichung in (a) das Ergebniss der Differentiation einer Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung von der Form

$$\text{(c)} \qquad a = f(x,\, y,\, y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots\, y_{n-1})$$

sein, wo a die allgemeine Integrationsconstante ist, sobald die $n-1$ Bedingungsgleichungen

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dy_{n-2}} = \dfrac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-1}}, & \dfrac{d\varphi}{dy_{n-3}} = \dfrac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-1}}, \quad \dfrac{d\varphi}{dy_{n-4}} = \dfrac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-1}}, \;\ldots \\ \dfrac{d\varphi}{dy_{n-k}} = \dfrac{d\varphi^{(k-1)}}{dy_{n-1}}, & \dfrac{d\varphi}{dy_1} = \dfrac{d\varphi^{(n-2)}}{dy_{n-1}}, \quad \dfrac{d\varphi}{dy} = \dfrac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_{n-1}}, \end{cases}$$

nebst der Gleichung

$$\text{(e)} \qquad \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx} + y_1\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy} + y_2\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_1} + y_3\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_2} + \ldots + y_{n-1}\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_{n-2}} = \frac{d\psi}{dy}$$

identisch erfüllt werden.

Beim Eintreffen dieser n Bedingungsgleichungen stellen sich die allgemeinen Gleichungen in (D) und (E) in No. 4. folgendermassen dar:

$$Y = \varphi^{(n-1)}, \quad Y^{(1)} = \varphi^{(n-2)}, \quad Y^{(2)} = \varphi^{(n-3)}, \;\ldots\; Y^{(n-2)} = \varphi^{(1)}, \quad Y^{(n-1)} = \varphi,$$
$$X = \psi - y_1\varphi^{(n-1)} - y_2\varphi^{(n-2)} - y_3\varphi^{(n-3)} - \ldots - y_{n-2}\varphi^{(2)} - y_{n-1}\varphi^{(1)},$$

so dass man durch Integration zu der Integralgleichung in (c) mittels der Gleichung

$$\text{(f)} \qquad \begin{aligned} d.f = {} & \varphi\, dy_{n-1} + \varphi^{(1)} dy_{n-2} + \varphi^{(2)} dy_{n-3} + \ldots + \varphi^{(n-2)} dy_1 + \varphi^{(n-1)} dy \\ & + [\psi - y_1\varphi^{(n-1)} - y_2\varphi^{(n-2)} + \ldots + y_{n-2}\varphi^{(2)} - y_{n-1}\varphi^{(1)}]\, dx \end{aligned}$$

gelangt, in welcher der Ausdruck rechterhand das unmittelbare Differentiations-Ergebniss einer Function von $x, y, y_1, y_2, \ldots\, y_{n-1}$ ist, und zwar, wenn man das Ergebniss dieser Integration, welches jedesmal durch $n+1$ einfache Quadraturen erzielt werden kann, in besagte Gleichung (c) für die dort vorkommende Function $f(x, y, y_1, y_2, \ldots\, y_{n-1})$ setzt. Besagte Bedingungsgleichungen in (d) und in (e), von welchen nach der in No. 3. allgemein gehaltenen Beweisführung die Richtigkeit dieser eben gemachten Aussage abhängig ist, und die wir, wie bereits erwähnt, in Folge unmittelbarer Entwickelung der allgemeinen Bedingungsgleichung (C) in No. 4. finden, sind aber nicht sämmtlich von einander wesentlich verschieden. Hierauf deutet schon das für den besondern Fall $n = 3$ gefundene End-Ergebniss hin, wo von den zwei Bedingungsgleichungen, die den hier in (d) zusammengestellten analog sind, eine als Folge der andern erkannt wurde. Ganz ähnlich verhält es sich mit den $n-1$ Bedingungsgleichungen in (d), wenn auch über n nicht

speciell verfügt wird. Wir werden von diesen nachweisen, dass, im Fall n die Form $2m$ oder $2m+1$ hat, wo m eine ganze Zahl ist, in dem einen wie in dem andern Falle m dieser Bedingungsgleichungen Folgen der übrigen m oder $m+1$ sind. Dies soll in dieser und in der folgenden No. geschehen.

1) Wir nehmen zuerst an, von den Bedingungsgleichungen in (d) finde die erste identisch Statt. Alsdann gehen die beiden ersten Vereinfachungsgleichungen in (b) (beachtend nämlich die Bedeutung von V aus der Gleichung (a) in folgende über:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \varphi^{(1)} = \dfrac{dV}{dy_{n-1}} - \dfrac{1}{\omega}d\cdot\varphi \quad \text{und} \\ \varphi^{(2)} = \dfrac{dV}{dy_{n-2}} - \dfrac{1}{\omega}d\cdot\varphi^{(2)}, \end{cases}$$

wo die Zeichen und Buchstabengrössen die gleiche Bedeutung wie oben haben. Differentiirt man nun, mit Zuziehung der Umformungsgleichung (12) in No. 3., die erste dieser Gleichungen partiell nach y_{n-2}, die zweite nach y_{n-1}, so giebt der Unterschied beider Ergebnisse folgende Gleichung:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-2}} - \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-1}} = -\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi}{dy_{n-2}} - \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-1}}\right] - \frac{d\varphi}{dy_{n-3}} + \frac{d\varphi'}{dy_{n-2}}.$$

Berücksichtiget man die jetzt festgestellte Annahme, dass die erste der Bedingungsgleichungen in (d) identisch bestehe, so geht die so eben aufgestellte Gleichung in

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-3}} = \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-1}},$$

über, welche Gleichung die zweite der Bedingungsgleichungen in (d) ist. *Also stellt sich die zweite der Bedingungsgleichungen in* (d) *als Folge der ersten desselben Systems heraus.*

2) Nehmen wir nunmehr an, die beiden ersten Bedingungsgleichungen in (d) würden identisch erfüllt, so kann die dritte Vereinfachungsgleichung in (b) folgendermaassen ausgedrückt werden:

$$(\alpha')\qquad \varphi^{(3)} = \frac{dV}{dy_{n-3}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\varphi^{(2)}$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten und zweiten der Gleichungen in (α) auf ähnliche Weise, wie die letzteren unmittelbar vorher mit einander verbunden wurden, so ergeben sich, in gleicher Ordnungsfolge, folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-3}} - \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-1}} = -\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi}{dy_{n-3}} - \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-1}}\right] - \frac{d\varphi}{dy_{n-4}} + \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-2}},$$

$$\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-3}} - \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-2}} = -\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-3}} - \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-2}}\right] - \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-4}} + \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-3}},$$

welche, beachtend, dass die zweite der Bedingungsgleichungen in (d) Statt findet, in folgende übergehen:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-3}} - \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-2}} + \frac{d\varphi}{dy_{n-4}} - \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-1}} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-3}} - \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-2}}\right] + \frac{d\varphi'}{dy_{n-4}} - \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-2}} = 0.$$

Aus diesen Ergebnissen lässt sich keine der Bedingungsgleichungen in (d) folgern; hingegen werden wir dieselben in dem nun folgenden Falle benutzen, um unter der Annahme, die drei ersten der Bedingungsgleichungen in (d) finden Statt, die vierte derselben als Folge von diesen darzuthun.

3) Wenn also die drei ersten der Bedingungsgleichungen in (d) als identisch bestehend vorausgesetzt werden, so bieten zunächst die unmittelbar vorher gefundenen zwei Gleichungen die Folgerungen

$$(\beta) \qquad \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-3}} = \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-2}} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-4}} = \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-2}}$$

dar, welche, in Verbindung mit der vierten der in (b) aufgestellten Vereinfachungsgleichungen, die bei der gegenwärtigen Vosaussetzung folgendermassen ausgedrückt werden darf:

$$(\alpha') \qquad \varphi^{(4)} = \frac{dV}{dy_{n-4}} - \frac{1}{\omega}d\cdot\varphi^{(3)},$$

die vierte der Bedingungsgleichungen in (d) als Folgerung liefern.

Verbindet man in der That die so eben aufgestellte Gleichung mit der ersten der Gleichungen in (α) durch partielle Differentiationen, Behufs Elimination von V, so erhält man, immer mit Zuziehung der allgemeinen Umformungsgleichung (12) in No. 3., folgende Gleichung:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-4}} - \frac{d\varphi^{(4)}}{dy_{n-1}} = -\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi}{dy_{n-4}} - \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-1}}\right] - \frac{d\varphi}{dy_{n-5}} + \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-2}}.$$

Berücksichtiget man nun die dritte der Bedingungsgleichungen in (d), und in Folge derselben die zweite der Gleichungen in (β), so geht die so eben gefundene Formel in

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-5}} = \frac{d\varphi^{(4)}}{dy_{n-1}},$$

über, *woraus die vierte der Bedingungsgleichungen in* (d) *als Folge der ersten, oder genauer, als Folge der ersten und dritten des besagten Systems erkannt wird.*

In der bis jetzt befolgten Art haben wir auch gefunden, dass bei Zugrundelegung der vier ersten der Bedingungsgleichungen in (d) keinerlei Folgerung von Belang zu ziehen sei; hingegen stellte sich uns die sechste der Bedingungsgleichungen in (d) als Folge der fünf ersten, oder genauer, als Folge der ersten, dritten und fünften besagter Bedingungsgleichungen heraus; und so sind wir denn, theils auf dem Wege der Induction, theils durch Analogie mit dem am Eingange dieser Abhandlung erwähnten *Pfaff*'schen Satze, auf die Vermuthung geführt worden, es dürfte allgemein, bei Zugrundelegung der $2k-1$ ersten von den Bedingungsgleichungen in (d), die $2k$te derselben als Folgerung sich ergeben, wenn k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Dass diese Vermuthung richtig sei, werden wir in der folgenden No. auf unzweideutige Weise darthun.

8.

Wir verlassen den in der vorigen Nummer befolgten, allzu speciellen Weg, da es demselben an einem Principe fehlt, welches die Möglichkeit einer allgemeinen Durchführung desselben voraussehen liesse, und betreten dagegen den folgenden, schon von vornherein allgemeinen Weg, um das uns Ausgangs vorhergehender No. gesteckte Ziel zu erreichen.

Wir gehen nämlich jetzt von der Annahme aus, es fänden von den in (d) zusammengestellten Bedingungsgleichungen die k ersten identisch Statt, d. h. die allgemeine Gleichung

$$\text{(g)} \qquad \frac{d\varphi}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-1}} = 0 \quad \{\text{von } r=2 \text{ bis } r=k\},$$

und suchen die Folgerungen aus dieser Voraussetzung.

Zuerst können die k ersten der Vereinfachungsgleichungen in (b) aus ähnlichen Gründen, wie sie in den besondern Fällen der vorhergehenden No. geltend gemacht wurden, folgendermaassen ausgedrückt werden:

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} \varphi^{(1)} = \dfrac{dV}{dy_{n-1}} - \dfrac{1}{\omega} d\cdot\varphi, \quad \varphi^{(2)} = \dfrac{dV}{dy_{n-2}} - \dfrac{1}{\omega} d\cdot\varphi^{(1)}, \ \ldots\ldots \\ \varphi^{(r)} = \dfrac{dV}{dy_{n-r}} - \dfrac{1}{\omega} d\cdot\varphi^{(r-1)}, \ \ldots\ldots \ \varphi^{(k)} = \dfrac{dV}{dy_{n-k}} - \dfrac{1}{\omega} d\cdot\varphi^{(k-1)}, \end{cases}$$

wo sämmtliche Zeichen und Buchstabengrössen die obige Bedeutung behalten.

Verbindet man nun die erste dieser Gleichungen mit der $r$ten, indem man jene nach y_{n-r} und diese nach y_{n-1} partiell differentiirt und den Unterschied der Ergebnisse nimmt, so erhält man, beachtend die allgemeine Umformungsgleichung (12) in No. 3., folgende Gleichung:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-1}} = -\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-1}}\right] - \frac{d\varphi}{dy_{n-r-1}} + \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-2}} = 0,$$

welche für alle ganzen Werthe von r, von 2 bis k, identisch Statt findet. Berücksichtiget man die allgemeine Bedingungsgleichung in (g), die für dieselben Werthe von r identisch bestehend vorausgesetzt wurde, so geht die zuletzt aufgestellte Gleichung in folgende über:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-2}} + \frac{d\varphi}{dy_{n-r-1}} - \frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-1}} = 0 \quad \{\text{von } r=2 \text{ bis } r=k\}.$$

Lässt man ferner in derselben allgemeinen Bedingungsgleichung (g) die allgemeine Zahlengrösse r in $r+1$ übergehen, so besteht die Gleichung für alle ganzen Zahlenwerthe von $r=1$ bis $r=k-1$, d. h. es ist

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-r-1}} - \frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-1}} = 0 \quad \{\text{von } r=1 \text{ bis } r=k-1\}.$$

Mit Beachtung dieses Ergebnisses folgt nun aus dem Vorausgehenden, erstens:

$$(g') \qquad \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-1}} = 0 \quad \{\text{von } r=2 \text{ bis } r=k-1\},$$

welche Gleichung mit (g) analog ist, und zweitens die Gleichung

$$(i) \qquad \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-k}} - \frac{d\varphi^{(k-1)}}{dy_{n-2}} + \frac{d\varphi}{dy_{n-k-1}} - \frac{d\varphi^{(k)}}{dy_{n-1}} = 0,$$

die wir aus der Annahme $r=k$ zogen.

Verbindet man auf ähnliche Weise, wie so eben, die zweite der Gleichungen in (h) mit der $r$ten desselben Systems, so ergiebt sich:

$$\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-2}} = -\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-2}}\right] - \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-r-1}} + \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-3}} = 0,$$

und zwar für alle ganzen Zahlenwerthe von $r=3$ bis $r=k$. Wird hier die Gleichheit in (g') zugezogen, so folgt

$$\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-r}} - \frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-3}} + \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-r-1}} - \frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-2}} = 0 \quad \{\text{von } r=3 \text{ bis } r=k-1\}.$$

Lässt man in (g') r in $r+1$ übergehen, so stellt sich folgende Gleichung dar:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-r-1}} - \frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-1}} = 0 \quad \{\text{von } r=1 \text{ bis } r=k-2\}.$$

Demnach ergeben sich aus den vorhergehenden Resultaten, wenn man sie zuerst mit dieser Gleichung combinirt und dann in derselben $r=k-1$ setzt, folgende zwei Ausdrücke:

$$(\text{g}'')\qquad \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-r}}-\frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-2}}=0\quad \{\text{von } r=3 \text{ bis } r=k-1\}\quad \text{und}$$

$$(\text{i}')\qquad \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-k+1}}-\frac{d\varphi^{(k-2)}}{dy_{n-3}}+\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-k}}-\frac{d\varphi^{(k-1)}}{dy_{n-2}}=0,$$

welche beziehungsweise zu denen (g') und (i) analog sind.

Verbindet man ferner die dritte der Gleichungen in (h) mit der $r$ten desselben Systems, Behufs Elimination von V, so erhält man für $r=4$ bis $r=k$ die Gleichung

$$\frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-r}}-\frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-3}}=-\frac{1}{\omega}d\cdot\left[\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-r}}-\frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-3}}\right]-\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-r-1}}+\frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-4}}=0,$$

welche vermöge der in (g'') aufgestellten in folgende Gleichung übergeht:

$$\frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-r}}-\frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-4}}+\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-r-1}}-\frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-3}}=0\quad \{\text{von } r=4 \text{ bis } r=k-2\};$$

Wird in (g'') r durch $r+1$ ersetzt, was

$$\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-r-1}}-\frac{d\varphi^{(r)}}{dy_{n-3}}=0\quad \{\text{von } r=2 \text{ bis } r=k-3\}$$

giebt, so liefert das Vorhergehende folgende zwei Ergebnisse:

$$(\text{g}''')\qquad \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-r}}-\frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-4}}=0\quad \{\text{von } r=4 \text{ bis } r=k-3\}\quad \text{und}$$

$$(\text{i}'')\qquad \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-k+2}}-\frac{d\varphi^{(k-3)}}{dy_{n-4}}+\frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-k+1}}-\frac{d\varphi^{(k-2)}}{dy_{n-3}}=0.$$

Wenn man nun auf diesem Wege fortfährt, nämlich die 4te, 5te, 6te ... und ϱte der Gleichungen in (h) jedesmal mit der $r$ten desselben Systems Behufs Elimination von V zu verbinden und bei den Ergebnissen das unmittelbar vorher Erhaltene, wie es bis jetzt geschah, in Betracht zu ziehen, so gelangt man, wenn $\varrho < r$ gesetzt wird, auf folgende zwei allgemeine Resultate:

$$(\text{g}^{(\varrho)})\qquad \frac{d\varphi^{(\varrho)}}{dy_{n-r}}-\frac{d\varphi^{(r-1)}}{dy_{n-\varrho-1}}=0\quad \{\text{von } r=\varrho+1 \text{ bis } r=k\}\quad \text{und}$$

$$(\text{i}^{(\varrho-1)})\qquad \frac{d\varphi^{(\varrho)}}{dy_{n-k+\varrho-1}}-\frac{d\varphi^{(k-\varrho)}}{dy_{n-\varrho-1}}+\frac{d\varphi^{(\varrho-1)}}{dy_{n-k+\varrho-2}}-\frac{d\varphi^{(k-\varrho+1)}}{dy_{n-\varrho}}=0,$$

die nach der allgemein bekannten Schlussweise, von ϱ auf $\varrho+1$, leicht bewiesen werden können. Durch Zugrundelegung dieser Ergebnisse, namentlich der in den Gleichungen (i), (i'), (i''), ... ($\text{i}^{(\varrho-1)}$) enthaltenen, sind wir nun

die Allgemeinheit der Ausgangs voriger No. ausgesprochenen Behauptung darzuthun im Stande.

Multiplicirt man, nämlich die Gleichung (i) mit $+1$, die (i') mit -1, die (i'') mit $+1$ u. s. w., die ($i^{(\varrho-1)}$) mit $(-1)^{\varrho-1}$, so giebt die Summe aller dieser Ergebnisse folgende Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\varphi}{dy_{n-k-1}} - \frac{d\varphi^{(k)}}{dy_{n-1}} + (-1)^{\varrho-1}\left[\frac{d\varphi^{(\varrho)}}{dy_{n-k+\varrho-1}} - \frac{d\varphi^{(k-\varrho)}}{dy_{n-\varrho-1}}\right] = 0.$$

Setzt man hier für k eine *gerade* Zahl und bezeichnet dieselbe durch $2k$, so geht die Gleichung in

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-2k-1}} - \frac{d\varphi^{(2k)}}{dy_{n-1}} + (-1)^{\varrho-1}\left[\frac{d\varphi^{(\varrho)}}{dy_{n-2k+\varrho-1}} - \frac{d\varphi^{(2k-\varrho)}}{dy_{n-\varrho-1}}\right] = 0$$

über. Nimmt man hier $\varrho = k$ an, so verschwindet der Theil mit $(-1)^{\varrho-1}$ und man erhält die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-2k-1}} - \frac{d\varphi^{(2k)}}{dy_{n-1}} = 0,$$

welche die Richtigkeit folgenden Satzes beweiset. *Wird das identische Bestandhaben der Gleichungen in* (g) *vorausgesetzt, und zwar für ein gerades* k, *also von der Form* 2k, *d. h. wird das identische Bestandhaben der* $2k-1$ *Gleichungen*

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-2}} = \frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-1}}, \qquad \frac{d\varphi}{dy_{n-3}} = \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{n-1}}, \qquad \frac{d\varphi}{dy_{n-4}} = \frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-1}}, \ldots \frac{d\varphi}{dy_{n-2k}} = \frac{d\varphi^{(2k-1)}}{dy_{n-1}},$$

angenommen, wo k *irgend eine ganze Zahl bezeichnet, so besteht auch die Gleichung*

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-2k-1}} = \frac{d\varphi^{(2k)}}{dy_{n-1}}$$

identisch.

Nachdem hierdurch die Ausgangs voriger No. ausgesprochene Behauptung begründet worden ist, bemerken wir noch, dass man aus der allgemeinen Gleichheit in (A), aus welcher dieser Satz gezogen wurde, keinen analogen Satz für die Fälle, wenn k eine *ungerade* Zahl ist, zu ziehen im Stande ist. Soll nämlich k eine *ungerade* Zahl sein, so kann durch keinerlei Verfügung über die ganze Zahl ϱ der mit $(-1)^{\varrho-1}$ multiplicirte Theil der Gleichheit (A) Null werden, wie es nothwendig sein muss, wenn das erste Gliederpaar besagter Gleichheit für sich identisch in Null übergehen soll.

9.

Wir sind nunmehr im Stande über die Beschaffenheit und Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung, wie die in (a) No. 7., zu erfüllen hat, um ein unmittelbares Differentiations-Er-

gebniss einer Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung von der Form in (c) daselbst zu sein, etwas Bestimmteres als dort mitzutheilen. Da nämlich das Ausgangs voriger No. ausgesprochene Theorem jedes ganze k betrifft, so setzen wir zuerst $k=1$; dann ergiebt sich aus dem Theorem, bei der Annahme eines identischen Bestandhabens der ersten der Bedingungsgleichungen in (d) besagter No., die zweite dieser Bedingungsgleichungen als nothwendige Folge der Annahme. Wird, zweitens, $k=2$ gesetzt, so folgt, dass, bei der Annahme des identischen Bestehens der ersten und dritten besagter Bedingungsgleichungen, die zweite und vierte dieser Gleichungen eine nothwendige Folge dieser Annahme ist. Eben so folgen bei der Annahme $k=3$ die zweite, vierte und sechste besagter Bedingungsgleichungen, sobald die erste, dritte und fünfte derselben als bestehend vorausgesetzt werden. Fährt man auf diese Weise zu schliessen fort, so stellt sich, beachtend die Bedingungsgleichung (e) No. 7., folgendes zweite Theorem heraus:

Damit eine Differentialgleichung n*ter Ordnung, wie die in* (a) *No. 7., das Differentiations-Ergebniss einer Differentialgleichung* $(n-1)$*ter Ordnung von der Form in* (c) *daselbst sei, müssen, bei Zugrundelegung der Vereinfachungsgleichungen in* (b) *ebendaselbst, die Bedingungsgleichungen*

$$\frac{d\varphi}{dy_{n-2}}=\frac{d\varphi^{(1)}}{dy_{n-1}},\qquad \frac{d\varphi}{dy_{n-4}}=\frac{d\varphi^{(3)}}{dy_{n-1}},\qquad \frac{d\varphi}{dy_{n-6}}=\frac{d\varphi^{(5)}}{dy_{n-1}}\ldots,$$

von welchen die letzte entweder

$$\frac{d\varphi}{dy_1}=\frac{d\varphi^{(n-2)}}{dy_{n-1}} \text{ oder } \frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_{n-1}}$$

ist, je nachdem n *eine ungerade oder eine gerade Zahl bezeichnet, wie auch die Gleichung*

$$\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx}+y_1\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy}+y_2\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_1}+\ldots+y_{n-1}\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_{n-2}}=\frac{d\psi}{dy}$$

identisch erfüllt werden; und umgekehrt: beim Eintreffen dieser Bedingungsgleichungen, deren Anzahl $\frac{1}{2}(n-1)+1$, *oder* $\frac{1}{2}n+1$ *ist, je nachdem* n *ungerade oder gerade ist, muss nothwendig die erste Aussage zutreffen, d. h. der Ausdruck rechterhand in der Gleichung* (f) *eben daselbst ist alsdann eine integrable lineare Differentialfunction der von einander unabhängig angenommenen* $n+1$ *Variabeln* $x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$.

Zürich, im September 1844.

14.

Sur quelques théorèmes de la géométrie de position.

(Par Mr. *A. Cayley* de Cambridge.)

---

§. I.

En prenant pour donné sur système quelconque de points et de droites, on peut mener par deux points donnés des nouvelles droites, ou trouver des points nouveaux, savoir les points d'intersection de deux des droites données; et ainsi de suite. On obtient de cette manière un nouveau système de points et de droites, qui peut avoir la propriété que plusieurs des points sont situés dans une même droite, ou que plusieurs des droites passent par le même point; ce qui donne lieu à autant de théorèmes de géométrie de position. On a déjà etudié la théorie de plusieurs de ces systèmes; par exemple de celui de quatre points; de six points, situés deux à deux sur trois droites qui se rencontrent dans un même point; de six points trois à trois sur deux droites, ou plus généralement, de six points sur une conique (ce dernier cas, celui de l'hexagramme mystique de *Pascal*, n'est pas encore epuisé; nous y reviendrons dans la suite), et même de quelques systèmes dans l'espace. Cependant il existe des systèmes plus généraux que ceux qui ont été examinés, et dont les proprietés peuvent être aperçues d'une manière presque intiutive, et qui, à ce que se crois, sont nouveaux. Commençons par le cas le plus simple. Imaginons un nombre n de points situés d'une manière quelconque dans l'espace, et que nous désignerons par $1, 2, 3 \ldots n$. Qu'on fasse passer par toutes les combinaisons de deux points, des droites, et par toutes les combinaisons de trois points des plans; puis coupons ces droites et ces plans par un plan quelconque, les droites selon des points, et les plans selon des droites. Soit $\alpha\beta$ le point qui correspond à la droite menée par les deux points α, β; soit de même $\beta\gamma$ le point qui correspond à celle menée par les points β, γ, et ainsi de suite. Soit de plus $\alpha\beta\gamma$ la droite qui correspond au plan passant par les trois points α, β, γ etc. Il est clair que les trois points $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ seront situés dans la

droite $\alpha\beta\gamma$. Donc en représentant par $N_2, N_3 \ldots$ le nombre des combinaisons de n lettres prises deux à deux, trois à trois etc. à la fois, on a le théorème suivant:

Théorème I. On peut former un système de N_2 *points situés trois à trois sur* N_3 *droites: savoir en réprésentant les points par* 12, 13, 23 *etc. et les droites par* 123 *etc., les points* 12, 13, 23 *seront situés sur la droite* 123, *et ainsi de suite.*

Pour $n=3$, ou $n=4$, cela est tout simple; on aura trois points sur une droite, ou six points trois à trois sur quatre droites; il n'en résulte aucune propriété géométrique. Pour $n=5$ on a dix points, trois à trois sur autant de droites, savoir les points

12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45

et les droites

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

Les points 12, 13, 14, 23, 24, 34 sont les angles d'un quadrilatère quelconque*), le point 15 est tout à fait arbitraire, le point 25 est situé sur la droite passant par les points 12, et 15, mais sa position sur cette droite est arbitraire. On déterminera depuis les points 35, 45; 35 comme points d'intersection des droites passants par 13 et 15 et par 23 et 25, c'est à dire des droites 135 et 235, et de même 45 comme point d'intersection des lignes 145 et 245. Les points 35 et 45 auront la propriété géométrique d'être en ligne droite avec 34, ou bien tous les trois seront dans une même droite 345.

Etudions de plus près la figure que nous venons de former. En prenant le cinq numéros dans un ordre déterminé, par exemple dans l'ordre naturel 1, 2, 3, 4, 5, les cinq points 12, 23, 34, 45, 51 pourront être considerés comme formant un pentagone que nous représenterons par la notation (12345). Les côtés de ce pentagone sont evidemment 123, 234, 345, 451, 512. De même les points 13, 35, 52, 24, 41 peuvent être considerés comme formant le pentagone (13524) dont les côtés sont 135, 352, 524, 241, 413. Ce pentagone est circonscrit au premier, car ses côtés passent evidemment par les angles 15, 23, 45, 12, 34 du premier: mais il est de même inscrit à celui-ci, car ses angles sont situés respectivement dans les côtés 123, 345, 512, 234, 451 de ce même pentagone. Donc les pentagones

---

*) Il faut avoir égard toujours à la différence entre *quadrilatère* et *quadrangle*; chaque quadrilatère a quatre côtés et six angles, chaque quadrangle a quatre angles et six côtés.

(12345), (13524)

sont à la fois circonscrits et inscrits l'un à l'autre, donc:

Théorème II. La figure, composée de dix points, trois à trois dans dix lignes, peut être considérée (même de six manières différentes) sous la forme de deux pentagones, inscrits et circonscrits l'un à l'autre.

Ou encore

Théorème III. Etant donné un pentagone quelconque, on peut toujours trouver un autre pentagone qui y est à la fois circonscrit et inscrit. Ce second pentagone peut satisfaire à une seule condition donnée quelconque.

Si par exemple le second pentagone doit avoir un des ses angles sur un point donné d'un côté du premier, la construction se déduit tout de suite de ce qui précède.

Ces paires correspondantes de pentagones forment une figure connue. On en trouve la construction dans une note de M. *Graves* dans le „Philosophical Magazine" (1840—43?), mais la même figure est encore mieux connue sous un autre point de vue. En effet, considérons le point **12**, et les droites **123**, **124**, **125** qui passent par ce point; puis les triangles dont les angles sont **13**, **14**, **15** et **23**, **24**, **25**. Les côtés de ces mêmes triangles sont **134**, **135**, **145** et **234**, **235**, **245**, et les côtés correspondants se rencontrent dans les points **34**, **35**, **45** qui sont en ligne droite. Donc le théorème sur les pentagones est le suivant:

„Si les angles de deux triangles sont situés deux à deux dans trois lignes qui se rencontrent dans un point, leurs côtés homologues se coupent dans trois points en ligne droite."

Remarquons aussi que ce théorème particulier (en n'empruntant rien des trois dimensions de l'espace) reproduit le théorème général relatif au nombre n. Il n'y a pour cela qu'à considérer n lignes passant par le même point, et qui peuvent être désignées par **1**, **2**, **3** ... n. En choisissant d'abord les points **12**, **13**, tout triangle dont les trois angles sont situés dans les lignes **1**, **2**, **3**, pendant que deux de ses côtés passent par **12**, **13**, a la propriété que le troisième côté passe par un point déterminé **23** situé dans la droite passant par **12**, **13**. En prenant arbitrairement le point **14**, on obtient avec les lignes **1**, **3**, **4** ou **1**, **2**, **4** les nouveaux points **34**, **24** qui sont en ligne droite avec **23**, et ainsi de suite.

Passons au cas $n = 6$. Il existe ici quinze points situés trois à trois sur vingt lignes, ou bien vingt lignes qui se coupent quatre à quatre en quinze

points. Il n'y a point ici des systèmes d'hexagones, mais il existe un système de neuf points qui est assez remarquable. Divisons d'une manière quelconque les numeros **1, 2, 3, 4, 5, 6** en deux suites par trois, par exemple en **1, 3, 5** et **2, 4, 6**, et considérons les neuf points

12, 14, 16
32, 34, 36
52, 54, 56.

Les droites qui passent par **12** et **32**, **14** et **34**, **16** et **36**, savoir **132**, **134**, **136**, se rencontrent dans le même point **13**. De même les droites qui passent par **32** et **52**, **34** et **54**, **36** et **56** se rencontrent dans **35**, et les droites passant par **12** et **52**, **14** et **54**, **16** et **56** se rencontrent dans **15**. Les points **13**, **15** et **35** sont sur la même droite **135**. En considérant les points **12**, **14**, **16** comme formant un triangle, et de même les points **32**, **34**, **36** et **52**, **54**, **56**, cela revient à dire que les lignes menées par les angles homologues des triangles prises deux a deux, se rencontrent trois à trois dans trois points situés dans la même droite. Ou bien, ce que l'on savait déjà par le theorème **5.**: les côtés homologues des triangles se rencontrent trois à trois dans trois points situés en lignes droites. En effèt, les côtés des triangles sont **124**, **126**, **146** pour la première, et **324**, **326**, **346** et **524**, **526**, **546** pour les deux autres. Les trois premiers côtés se rencontrent dans **24**, les autres dans **26** et **46**, et ces trois points sont dans la droite **246**. Maintenant tout cela arrive également en combinant les colonnes verticales, ou en considerant les neuf points comme formant les trois autres triangles dont les angles sont **12**, **32**, **52**; **14**, **34**, **54**; **16**, **36**, **56**. Cela donne lieu au théorème suivant:

Théorème IV. Le système de quinze points, situés trois à trois sur vingt droites, contient (et cela même de dix manières différentes) un système de neuf points qui ont la propriété de former de deux manières différentes trois triangles, tels, que les lignes qui passent par leurs angles homologues, prises deux à deux, se rencontrent dans trois points qui sont en ligne droite, tandis que les côtés homologues des triangles se coupent trois à trois en trois autres points qui sont aussi en ligne droite. Dans la seconde manière de former les triangles, ces deux systèmes de trois points en lignes droite sont seulement échangés.

Il ne reste qu'à savoir combien il y en a d'arbitraires dans le système de quinze points situés trois à trois sur vingt droites. En supposant le système formé pour le nombre cinq, on peut prendre arbitrairement **16** et **26** sur la

droite **126** qui est determinée par les points **12** et **16**. Donc **12, 13, 14, 15** et **16** sont arbitraires et **23, 24, 25, 26** sont arbitrairement situés sur des lignes données. L'existence des lignes **345, 346, 356, 456** constitue autant de théorèmes géométriques; c'est à dire, chacune de ces droites est déterminée par *trois points.*

En essayant d'approfondir la théorie de six points sur la même conique, on rencontrera un système de neuf points, tel que ceux que nous venons d'examiner; mais il est moins général. Il existe des relations entre les points qui n'ont pas lieu dans le système général. Je renvois cette discussion à une section separée de ce memoire, et je passe au cas de $n=7$.

Pour ce cas on a tout de suite le théorème suivant:

Théorème V. Le système de vingt-et-un points situés trois à trois sur trente cinq droites, peut être considéré (même de cent vingt manières différentes) comme composé de trois heptagones, le premier circonscrit au second, le second au troisième et le troisième au premier. Les heptagones par exemple peuvent être **(1234567), (1357246), (1526374).**

Dans ce système **12, 13, 14, 15, 16, 17** sont arbitraires, et **23, 24, 25, 26, 27** le sont sur des droites données; les droites **345, 346, 347. 356, 357, 367, 456, 457, 467, 567** sont déterminées chacune par trois points. Dans le cas général **12, 13 ... 1**n sont arbitraires, et **23 ... 2**n le sont sur des droites données. Il existe $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ droites dont chacune est déterminée par trois points. Un théorème analogue à celui **5.** a lieu quand n est un nombre premier: savoir le suivant:

Théorème VI. Le système de N_2 *points, situés trois à trois sur* N_3 *droites, peut être considéré (même de* $\frac{1.2....(n-2)}{n-1}$ *manières) comme composé de* $\frac{n-1}{2}$ *n-gones, le premier circonscrit au second, le second au troisième etc., et le dernier au premier.*

Je ne connais pas d'autres cas où l'idée des nombres premiers se présente dans la géométrie. Il sera peut être possible de trouver des théorèmes analogues à ceux No. 3, 4, 5 pour toutes les formes du nombre n, mais je n'ai pas encore examiné cela.

Le théorème général I, peut être considéré comme l'expression d'un fait analytique, qui doit également avoir lieu en considérant quatre coordonnées au lieu de trois. Ici une interprétation géométrique a lieu, qui s'applique aux

points *dans l'espace.* On peut en effèt, *sans recourrir à aucune notion métaphysique à l'égard de la possibilité de l'espace à quatre dimensions,* raisonner comme suit (tout cela pourra aussi être traduit facilement en langue purement analytique): En supposant quatre dimensions de l'espace, il faudra considérer des lignes déterminées par deux points (ce que nous appelerons des *demi-plans déterminés* par trois points, et des *plans* déterminés par quatre points; deux plans se coupent alors suivant un demi plan etc.). L'espace ordinaire doit être consideré comme plan, et il coupera un plan selon un plan ordinaire, un demi-plan selon une ligne ordinaire, et un ligne selon un point ordinaire. Tout cela posé: en considérant un nombre n de points, et les combinant deux à deux, trois à trois, et quatre à quatre par des lignes, des demi-plans et des plans, puis coupant le système par l'espace consideré comme plan, on obtient le théorème suivant de géométrie à trois dimensions:

Théorème VII. On peut former un système de N_2 *points, situés trois à trois dans* N_3 *droites qui elles mêmes sont situées quatre à quatre dans* N_4 *plans. En représentant les points par* 12, 13 *etc., les points situés dans la même droite sont* 12, 13, 23, *et les droites étant représentées par* 123 *etc. comme auparavant, les droites* 123, 124, 134, 234 *sont situées dans le même plan* 1234.

En coupant cette figure par un plan, on obtient le théorème suivant de géométrie plane:

Théorème VIII. On peut former un système de N_3 *points situés quatre à quatre dans* N_4 *droites. Les points doivent être représentées par la notation* 123, *etc. et les droites par* 1234 *etc. Alors* 123, 124, 134, 234 *sont dans la même droite designée par* 1234.

De même, en considérant un espace à $p+2$ dimensions, on obtient la proposition suivante, encore plus générale:

Théorème IX. On peut former dans l'espace un systéme de N_p *points, qui passent* $p+1$ *à* $p+1$ *par* N_{p+1} *droites, situées* $p+2$ *à* $p+2$ *dans* N_{p+2} *plans, ou bien pour la géométrie plane, un système de* N_p *points, situés* $p+1$ *à* $p+1$ *dans* N_{+1} *points.*

Des théorèmes analogues à ceux No. 4, 5 seraient problablement très nombreux et très compliqués.

Les réciproques polaires auront évidemment lieu pour tous ces théorèmes; on pourrait aussi les démontrer directement d'une manière analogue.

§ II.

Sur le théorème de Pascal.

En considérant six points sur la même conique, et les prenant dans un ordre déterminé, pour en former un hexagone, on sait que les côtés opposés se rencontrent dans trois points situés en ligne droite. En prenant les points dans un ordre quelconque, on en peut former soixante hexagones, à chacune desquelles correspond une droite; il s'agit maintenant de trouver la relation entre ces droites.

M. *Steiner* a prouvé dans son ouvrage „Systematische Entwickelungen etc." que ces soixante droites passent trois à trois par vingt points, et il ajoute que ces vingt points sont situés quatre à quatre sur quinze droites. La première partie de ce théorème peut être demontrée assez facilement, comme nous le verrons: mais pour la seconde partie, je n'ai pas réussi à trouver les combinaisons de quatre points qui doivent être situés en ligne droite, et il me parait même qu'il est impossible des les trouver*)

Cherchons les combinaisons des droites qui doivent passer trois à trois par le même point.

Soient **1, 2, 3, 4, 5, 6** les six points situés sur la même conique. Considérons d'abord l'hexagone **123456** que l'on obtient en prenant les points dans un ordre déterminé. Suivant le théorème de *Pascal* les trois points

12.45, **23.56**, **34.61**

(où **12.45** désigne le point d'intersection des lignes passant par les points **1, 2** et **4, 5**) sont situés en ligne droite. Considérons les six hexagones

1 2 3 4 5 6
1 4 3 6 5 2
1 6 3 2 5 4

---

1 4 3 2 5 6
1 2 3 6 5 4
1 6 3 4 5 2

qu'on tire du premier en permutant les nombres **2, 4, 6** correspondants aux

---

*) Je ne sais pas s'il existe une demonstration de la seconde partie du théorème; je n'ai pu la trouver nulle part. Au cas que cette partie du théorème n'étoit pas correcte, il paroit que l'on devra peut-être lui substituer la proposition suivante „Les vingt points déterminent deux à deux dix lignes qui passent trois à trois par dix points". On verra dans ce qui suit, de quelle manière il faudrait combiner ces points.

sommets alternés de l'hexagone. Pour les trois premiers on fait les permutations cycliques de ces nombres (savoir 246, 462, 624), pour les trois autres on fait d'abord une inversion 426, puis les permutations cycliques (426, 264, 642). En écrivant les combinaisons des points qui doivent être situés en ligne droite, on a

12.45	23.56	34.61
36.12	56.14	52.34
45.36	14.23	16.52
14.25	43.56	32.61
36.14	56.12	54.32
25.36	12.34	61.54

Suivant cette table les points sur la même horizontale sont en ligne droite.

On remarquera d'abord que les trois premières droites passent par les angles des triangles dont les côtés sont 36, 45, 12 et 14, 23, 56. Les côtés homologues de ces triangles se rencontrent en 36.14, 45.23, 12.56 qui sont en ligne droite, c'est à dire, par un théorème déjà cité: les trois lignes passent par un même point. On aurait été conduit au même résultat en observant que les trois premières droites passent par les triangles dont les côtés sont 14, 23, 56 et 52, 16, 34 ou enfin 52, 16, 34 et 36, 45, 12. De même les trois dernières droites passent par le même point. Donc il a été demontré ce qui suit:

Théorème X. En considérant les trois hexagones qu'on obtient en permutant cycliquement les angles alternés du premier, les trois droites qui y correspondent se rencontrent dans un même point. Les soixante lignes passent donc trois à trois par vingt points.

Ajoutons qu'aux trois hexagones de ce théorème correspondent d'une manière particulière trois autres hexagones, ou que les vingt points doivent se combiner deux à deux d'une manière particulière.

Mais on se formera une idée plus claire du système en remarquant que les neuf droites

36,	45,	12
14,	23,	56
25,	61,	34

ont entre elles une relation qui est polaire reciproque de celle entre les neuf points du théorème IV. Pour faciliter cette comparaison, je prendrai d'abord le théorème analogue pour les tangentes d'une conique.

Théorème XI. Soient 1, 3, 5 et 2, 4, 6 des tangentes à une même conique et 12 etc. les points d'intersection de ces droites: les neuf points

36, 45, 12
14, 23, 56
25, 61, 34

peuvent être déterminés au moyen de six points de l'espace $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$, de manière que $A\alpha$ etc. représente le point d'intersection de la droite passant par A, α avec le plan de la figure. Les points sont correspondants entre eux de cette manière:

$$A\alpha,\quad A\beta,\quad A\gamma;$$
$$B\alpha,\quad B\beta,\quad B\gamma;$$
$$C\alpha,\quad C\beta,\quad C\gamma.$$

Seulement les points 36, 23, 34 etc. sont en ligne droite, ce qui n'auroit pas lieu pour les points $A\alpha, B\beta, C\gamma$, si la position de $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ etait arbitraire. On est donc conduit à ce problème:

„Trouver six points $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ dans l'espace, tels, qu'en représentant par $A\alpha$ etc. l'intersection de la droite menée par $A\alpha$ avec un plan donné, les combinaisons des points

$$(A\alpha,\quad B\beta,\quad C\gamma)$$
$$(A\beta,\quad B\gamma,\quad C\alpha)$$
$$(A\gamma,\quad B\alpha,\quad C\beta)$$
$$(A\alpha,\quad B\gamma,\quad C\beta)$$
$$(A\beta,\quad B\alpha,\quad C\gamma)$$
$$(A\gamma,\quad B\beta,\quad C\alpha)$$

soient en ligne droite.

Pour le théorème de *Pascal*, cela donne:

„*Théorème XII. Soient* 1, 3, 5 *et* 2, 4, 6 *des points d'une conique, les neuf lignes*

36, 45, 12
14, 23, 56
25, 61, 34

peuvent être considérées comme les projections des lignes

$$A\alpha,\quad A\beta,\quad A\gamma$$
$$B\alpha,\quad B\beta,\quad B\gamma$$
$$C\alpha,\quad C\beta,\quad C\gamma$$

sur le plan de la figure, et A, B, C, α, β, γ *sont six plans, dont la relation reste encore à déterminer.*

En effectuant la solution du problème que j'ai indiquée on aurait, à ce qu'il me semble, un point de vue tout à fait nouveau d'envisager les coniques.

Je vais ajouter encore quelques réflexions sur la manière de chercher les relations qui existent entres les vingt points. En écrivant seulement les angles alternés des hexagones, on a cette table:

1 . 2 . 3.
1 . 2 . 4.
1 . 2 . 5.
1 . 2 . 6.
1 . 3 . 4.
1 . 3 . 5.
1 . 3 . 6.
1 . 4 . 5.
1 . 4 . 6.
1 . 5 . 6.

A chaque symbole correspondent six hexagones, qui, a ce que nous avons vu, se partagent en deux paires de trois hexagones, et a chaque combinaison de trois, il correspond un point. Il y a donc deux points qui correspondent au symbole 1.3.5., deux qui correspondent au symbole 1.3.6., deux au symbole 1.5.6 etc. En représentant donc par $\overline{35}$, $\overline{36}$, $\overline{56}$, les droites passant par ces paires de points, il me paroit probable que ces droites aient ensembles les relations du théorème I, (savoir que $\overline{35}$, $\overline{36}$, $\overline{56}$ se rencontrent dans un point etc.), ce qui donnerait lieu au théorème hypothétique que j'ai enoncé dans une note. C'est, à ce que je puisse aperçevoir, la seule manière symétrique de combiner les droites. Mais au moins les symboles

1 . 3 . 5.
1 . 3 . 6.
1 . 5 . 6.

ont entre eux des rapports singuliers. En effèt, ecrivons pour chacun les neuf points du théorème XII, on a ce tableau:

3 6,	4 5,	1 2
1 4,	2 3,	5 6
2 5,	6 1,	3 4
3 5,	6 4,	1 2
1 4,	2 3,	5 6
2 6,	1 5,	3 4
3 5,	4 6,	1 2
1 4,	2 5,	3 6
2 6,	1 3,	5 4

qui ne contient que quatorze points. Cela merite des recherches ultérieures.

Démonstration analytique du théorème de Pascal, *et de la première partie de celui de Mr.* Steiner. *Formules relatives au même sujet.*

Soient $P=0$, $Q=0$, $R=0$ les équations des lignes **12**, **34**, **56**. On demontrera assez facilement que les équations des lignes **45**, **61**, **23** peuvent être représentées par

$$P+\nu Q+\mu R=0,$$
$$\nu P+\quad Q+\lambda R=0,$$
$$\mu P+\lambda Q+\quad R=0.$$

En effèt les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 seront situés dans la conique

$$P^2+Q^2+R^2+\lambda+\frac{1}{\lambda}QR+\mu+\frac{1}{\mu}PR+\nu+\frac{1}{\nu}PQ=0;$$

car en fesant dans cette équation $P=0$, l'équation se réduit à

$$\frac{1}{\lambda}(Q+\lambda R)(\lambda Q+R)=0;$$

c'est à dire, la conique contient les points déterminés par

$$(P=0,\quad \nu P+Q+\lambda R=0)$$
$$(P=0,\quad \mu P+\lambda Q+R=0),$$

ou bien les points 1, 2; et de même elle contient les autres points 3, 4, 5, 6. Les fonctions P, Q, R sont censées contenir chaune deux constantes arbitraires; donc on a neuf constantes arbitraires dans ce système, qui par conséquent est tout à fait général. On peut former le système suivant d'équations:

12. $P=0$

13. $\lambda\mu P+Q+\lambda R=0$

14. $\lambda P+\mu Q+\lambda\mu R=0$

15. $P+\nu Q+\nu\lambda Q=0$

$$
\begin{array}{ll}
16. & \nu P + Q + \lambda R = 0 \\
23. & \mu P + \lambda Q + R = 0 \\
24. & P + \mu\lambda Q + \mu R = 0 \\
25. & \lambda P + \nu\lambda Q + \nu R = 0 \\
26. & \nu\lambda P + \lambda Q + R = 0 \\
34. & Q = 0 \\
35. & \mu P + \mu\nu Q + R = 0 \\
36. & \mu\nu P + \mu Q + \nu R = 0 \\
45. & P + \nu Q + \mu R = 0 \\
46. & \nu P + Q + \nu\mu R = 0 \\
56. & Q = 0.
\end{array}
$$

Ecrivons les équations des lignes comprises dans la table de neuf points ci-dessus donnés. On a d'abord

$$
\begin{array}{lll}
\mu\nu P + \mu Q + \nu R = 0, & P + \nu Q + \mu R = 0, & P = 0, \\
\lambda P + \mu Q + \lambda\mu R = 0, & \mu P + \lambda Q + R = 0, & R = 0, \\
\lambda P + \nu\lambda Q + \nu R = 0, & \nu P + Q + \lambda R = 0, & Q = 0.
\end{array}
$$

En combinant la seconde et la troisième colonne verticale du tableau, on obtient pour les trois points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone **123456**, les équations

$$
\begin{array}{ll}
(P = 0, & \mu Q + \nu R = 0) \\
(R = 0, & \lambda P + \mu Q = 0) \\
(Q = 0, & \lambda P + \nu R = 0)
\end{array}
$$

qui appartiennent à trois points situés sur la droite

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0,$$

ce qui suffit pour démontrer le théorème de *Pascal.*

On obtient de même, en combinant les autres paires de colonnes verticales, deux systèmes de trois points, respectivement situés dans les droites

$$\frac{P}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} + \frac{R}{\nu} = 0 \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{P}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} + \frac{R}{\nu}\right)\lambda\mu\nu + \lambda P + \mu Q + \nu R = 0,$$

lesquelles, avec la ligne qu'on vient de trouver,

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0,$$

se rencontrent évidemment dans un même point, déterminé par les deux équations

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0 \text{ et}$$
$$\frac{P}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} + \frac{R}{\nu} = 0.$$

Voilà une démonstration de la première partie du théorème de Mr. *Steiner*. Les équations que nous venons de trouver appartiennent au point d'intersection des trois droites qui correspondent au premier des trois hexagones du symbole **1.3.5**. Pour trouver l'autre point correspondant de la même manière à ce symbole, il faut combiner les colonnes horizontales, ce qui donne pour les coordonnées de ce point:

$$(\lambda - \mu\nu)P = (\mu - \nu\lambda)Q = (\nu - \lambda\mu)R.$$

En cherchant de même les expressions des points qui correspondent aux symboles **1.3.6** et **1.5.6**, on obtient des résultats moins élégants, mais qui valent peut-être la peine d'être énoncés ici.

Je forme cette table complète.

Systèmes de trois lignes, qui se rencontrent dans un point.

Pour **1.3.5**

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \lambda P + \mu Q + \nu R = 0 \\ \dfrac{P}{\lambda} + \dfrac{Q}{\mu} + \dfrac{R}{\nu} = 0 \\ \lambda P + \mu Q + \nu R + \lambda\mu\nu\left(\dfrac{P}{\lambda} + \dfrac{Q}{\mu} + \dfrac{R}{\nu}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} (\lambda - \nu\mu)P = (\nu - \lambda\mu)R \\ (\nu - \lambda\mu)R = (\mu - \nu\lambda)Q \\ (\mu - \nu\lambda)Q = (\lambda - \mu\nu)R. \end{cases}$$

Pour **1.3.5**

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \mu P + \lambda Q + \lambda\mu\nu R = 0 \\ \lambda\nu P + \nu\mu Q + R \quad = 0 \\ (\mu P + \lambda Q + \lambda\mu\nu R) + (\lambda\nu P + \nu\mu Q + R) = 0. \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} (\mu - \nu\lambda)P + R(1 - \mu\nu\lambda) = 0 \\ R(1 - \nu\lambda\mu) + (\lambda - \nu\mu)Q = 0 \\ (\lambda - \mu\nu)Q - (\mu - \nu\lambda)P = 0. \end{cases}$$

Pour **1.5.6**

$$\text{I.}\quad \begin{cases} (\mu\nu(1 - \lambda\mu\nu) - \lambda(1 - \mu^2)P + (\mu - \nu\lambda)Q + (\mu - \nu\lambda)\mu\nu R = 0 \\ (\mu\nu(1 - \lambda\mu\nu) - \lambda(1 - \nu^2))P + (\nu - \lambda\mu)\mu\nu Q + \nu - \lambda\mu R = 0 \\ \lambda(\mu^2 - \nu^2)P + (\mu - \nu\lambda - (\nu - \lambda\mu)\mu\nu)Q + ((\mu - \nu\lambda)\mu\nu - (\nu - \lambda\mu))R = 0. \end{cases}$$

$$
\text{II.}\quad\begin{cases}
(\lambda(1-\nu^2)+\mu(\nu-\lambda\mu))P+(1-\mu\nu\lambda)\mu Q+(1-\mu\nu\lambda)\nu R=0.\\
(\lambda\nu^2(1-\mu^2)-\mu(\nu-\lambda\mu))P+\nu(\lambda-\mu\nu)Q+\mu(\lambda-\mu\nu)R=0\\
(1-\nu^2\mu^2)\lambda P+(\nu(\lambda-\mu\nu)+\mu(1-\mu\nu\lambda))Q+(\mu(\lambda-\mu\nu)+\nu(1-\lambda\mu\nu))R=0.
\end{cases}
$$

Note sur le théorème de Mr. *Brianchon*.

On peut donner une démonstration semblable de ce théorème, en prenant pour les équations des six tangentes celles-ci:

$$
\begin{array}{ll}
1. & P=0\\
3. & Q=0\\
5. & R=0\\
4. & \alpha P+\beta Q+\gamma R=0\\
6. & \alpha' P+\beta' Q+\gamma' R=0\\
2. & \alpha'' P+\beta'' R+\gamma'' R=0,
\end{array}
$$

et en cherchant la relation entre les coefficients qui est nécessaire si ces six équations doivent appartenir aux tangentes d'une même conique. On obtient facilement

$$(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)(\beta'\alpha''-\beta''\alpha')(\gamma''\beta-\gamma\beta'')=(\gamma\beta'-\gamma'\beta)(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')(\beta''\alpha-\beta\alpha''),$$

ce qui exprime aussi la condition que les trois diagonales doivent se rencontrer dans un même point.

Berlin, 2 Septembre 1845.

15.

Problème de géométrie analytique.

(Par Mr. *Cayley* de Cambridge.)

„*Trouver explicitement les coordonnées des centres de similitude de deux surfaces du second ordre, dont chacune est circonscrite à une même surface de cet ordre.*

Lemme.

Soit

$$1.\qquad U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy + 2Lxw + 2Myw + 2Nzw + Pw^2$$

l'expression générale d'une fonction homogène du second ordre à quatre variables, et considérons les dérivées

$$2.\qquad KU = \begin{vmatrix} A, & H, & G, & L \\ H, & B, & F, & M \\ G, & F, & C, & N \\ L, & M, & N, & P \end{vmatrix}, \qquad F_{p.o}U = \begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \varrho, & \omega \\ \alpha & A, & H, & G, & L \\ \beta & H, & B, & F, & M \\ \gamma & G, & F, & C, & N \\ \delta & L, & M, & N, & P \end{vmatrix}$$

où dans $F_{p.o}U$ les lettres o, p écrites en bas servent à indiquer les variables α, β, γ, δ et ξ, η, ϱ, ω qui doivent entrer dans l'expression de cette fonction; par exemple $F_{pp}U$ est ce que devient $F_{p.o}U$, en écrivant ξ, η, ϱ, ω au lieu de α, β, γ, δ.

Cela posé, soit

$$3.\qquad U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy + 2Lxw + 2Myw + 2Nzw + 2Pw^2.$$

$$4.\qquad V = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w.$$

on aura cette équation identique:

$$5.\qquad F_{pp}(U+V^2)KU - F_{pp}(U)K(U+V^2) = (F_{op}U)^2,$$

qui subsiste même pour un nombre quelconque de variables.

L'expression analytique du théorème consiste en effet en ce que les réciproques de deux surfaces du second ordre, circonscrites l'une à l'autre, sont deux surfaces du second ordre qui ont cette même relation. Car en prenant $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ pour les coordonnées d'un point, les équations de deux surfaces circonscrites l'une à l'autre sont

$$6. \quad \begin{cases} U = 0 \\ U + V^2 = 0. \end{cases}$$

Les équations de leurs réciproques polaires (par rapport à $x^2+y^2+z^2+w^2=0$) sont

$$F_{pp}U = 0, \qquad F_{pp}(U + V^2) = 0,$$

c'est à dire, en vertu du théorème qui vient d'être posé:

$$7. \quad F_{pp}U = 0 \qquad K(U + V^2)F_{pp}U + (F_{op}U)^2 = 0,$$

où $K(U + V^2)$ est constant; c'est à dire les premières parties des équations ne diffèrent entre elles que par le carré de la fonction linéaire $(F_{op}U)$; ce qui prouve le théorème en question.

Solution.

Soient

$$8. \quad U + V_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad U + V_2^2 = 0$$

les équations des deux surfaces, dont chacune est circonscrite à $U = 0$. Les expressions de V_1 et V_2 sont

$$9. \quad \begin{cases} V_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 w \quad \text{et} \\ V_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 w. \end{cases}$$

où les lettre $0, 0_1$ ecrites en bas se rapportent à $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ et à $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ respectivement. Mettons de plus, pour abréger,

$$10. \quad \begin{cases} K(U + V_1^2) = K_1 \\ K(U + V_2^2) = K_2. \end{cases}$$

Les polaires des deux surfaces ont pour équations.

$$11. \quad \begin{cases} K_1 F_{pp}(U) + (F_{o_1p}U)^2 = 0 \\ K_2 F_{pp}(U) + (F_{o_2p}U)^2 = 0, \end{cases}$$

et ces surfaces polaires se rencontrent évidemment selon les courbes situés dans les plans exprimés par les équations

$$12. \quad \sqrt{K_2}\, F_{o_1p}U \pm \sqrt{K_1}\, F_{o_2p}U = 0;$$

équations qu'on peut écrire sous cette forme très simple:

$$13. \quad F_{o'p}(U) = 0,$$

en mettant

$$14. \quad \begin{cases} \alpha' = \sqrt{K_2}\,\alpha_1 \pm \sqrt{K_1}\,\alpha_2 \\ \beta' = \sqrt{K_2}\,\beta_1 \pm \sqrt{K_1}\,\beta_2 \\ \gamma' = \sqrt{K_2}\,\gamma_1 \pm \sqrt{K_1}\,\gamma_2 \\ \delta' = \sqrt{K_2}\,\delta_1 \pm \sqrt{K_1}\,\delta_2 \end{cases}$$

et supposant que o' se rapporte à α', β', γ', δ'. On a enfin, en se servant de la notation complète des déterminants,

$$15. \quad \begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \varrho, & \omega \\ \alpha' & A, & H, & G, & L \\ \beta' & H, & B, & F, & M \\ \gamma' & G, & F, & C, & N \\ \delta' & L, & M, & N, & P \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui est double, à cause des doubles valeurs de α', β', γ', δ'. Les poles de ces plans sont les centres de similitude des deux surfaces données. Soit donc identiquement

$$16. \quad \begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \varrho, & \omega \\ \alpha' & A, & H, & G, & L \\ \beta' & H, & B, & F, & M \\ \gamma' & G, & F, & C, & N \\ \delta' & L, & M, & N, & P \end{vmatrix} = \mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\varrho + \mathfrak{D}\omega,$$

on a

$$17. \quad x:y:z:w = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C}:\mathfrak{D}$$

pour les coordonnées $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ des deux centres de similitude. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sont données par l'équation (16), savoir par

$$18. \quad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} . & 1 & . & . & . \\ \alpha' & A, & H, & G, & L \\ \beta' & H, & B, & F, & M \\ \gamma' & G, & F, & C, & N \\ \delta' & L, & M, & N, & P \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A} = -\begin{vmatrix} \alpha' & H, & G, & L \\ \beta' & B, & F, & M \\ \gamma' & F, & C, & N \\ \delta' & M, & N, & P \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

α', β', γ', δ' sont donnés par (14), et K_1, K_2 représentent ce que devient le déterminant

$$19. \quad \begin{vmatrix} A, & H, & G, & L \\ H, & B, & F, & M \\ G, & F, & C, & N \\ L, & M, & N, & P \end{vmatrix}$$

en écrivant $B+\alpha_1^2$, $B+\beta_1^2$, $C+\gamma_1^2$, $P+\delta_1^2$, $F+\beta_1\gamma_1$, $G+\gamma_1\alpha_1$, $H+\alpha_1\beta_1$, $L+\alpha_1\delta_1$, $M+\beta_1\delta_1$, $N+\gamma_1\delta_1$, ou $A+\alpha_2^2$ etc. au lieu de $A, B, C, P, F, G, H, L, M, N$.

Berlin, 4 Sept. 1845.

16.

Zwei Beweise für die Existenz der Wurzeln der höhern algebraischen Gleichungen.

(Von Herrn *J. C. Ullherr*, Professor an der polytechnischen Schule zu Nürnberg.)

Folgende Bemerkungen über imaginäre Ausdrücke mögen vorausgehen.

1) Unter einem imaginären Ausdruck wird ein Ausdruck von der Form $p+i.q$ verstanden, wo p und q reelle Zahlen bedeuten und i die imaginäre Einheit bezeichnet; und wenn von der stetigen Aenderung eines solchen Ausdrucks die Rede ist, so soll damit gemeint sein, dass die reellen Theile desselben sich stetig ändern.

2) Der imaginäre Ausdruck $p+i.q$ lässt sich immer auf die Form $r.[\cos\varphi+i.\sin\varphi]$ bringen, wo der Modul r positiv und der Bogen φ reell ist. Der Bogen φ ist bedeutungslos, wenn p und q gleichzeitig Null sind.

Betrachtet man p und q als Coordinatenwerthe eines Puncts M in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene der Axen OP, OQ, so sind r und φ bekanntlich die zu diesem Punct gehörigen Polarcoordinatenwerthe in Bezug auf das System, dessen Pol O und dessen Anfangsrichtung OP ist. Da nun auf diese Art durch die Lage des Puncts M alle, in beiden Formen des imaginären Ausdrucks vorkommenden reellen Zahlen dargestellt werden, so mag dieser Punct der Repräsentant des imaginären Ausdrucks heissen.

Eine stetige Aenderung der Lage von M bedingt eine stetige Aenderung der Zahlen p, q, r und φ, und umgekehrt bedingt eine stetige Aenderung dieser letztern Stücke eine stetige Aenderung der Lage des Puncts M.

3) Die Summe zweier imaginären Ausdrücke ist wieder ein solcher Ausdruck, und wenn die Summanden sich stetig ändern, so erleidet auch die Summe eine stetige Aenderung.

Ist c der Modul der Summe der beiden Ausdrücke, deren Moduli a und b sind, und werden Summe und Summanden bezüglich durch die Puncte C, A und B repräsentirt, so bilden, wie sich leicht aus 2) ergiebt, die

vier Puncte O, A, B und C die Eckpuncte eines Parallelogramms, dessen Diagonal OC ist, und es liegt daher c zwischen den Grenzen $a+b$ und $\pm(a-b)$. Der Winkel, welchen OC mit OA oder OB einschliesst, wird übrigens um so kleiner sein, je kleiner $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$ ist.

4) Das Product zweier imaginärer Ausdrücke ist wieder ein solcher Ausdruck, und wenn die Factoren sich stetig ändern, so erleidet auch das Product eine stetige Aenderung.

Es ist

$$a.[\cos\alpha+i.\sin\alpha)\times b.[\cos\beta+i.\sin\beta]=a.b.[\cos(\alpha+\beta)+i.\sin(\alpha+\beta)],$$

und daher, wenn n eine ganze positive Zahl ist,

$$[a.[\cos\alpha+i.\sin\alpha]]^n=a^n.[\cos(n\alpha)+i.\sin(n\alpha)].$$

5) Sind r^n, a_1r^{n-1}, $a_2r^{n-2}\ldots a_n$ die Moduli imaginärer Ausdrücke, so lässt sich r immer so gross annehmen, dass der Modul r^n des ersten Ausdrucks beliebig vielmal grösser wird, als der Modul der Summe aller folgenden; denn nach 3) ist der Modul dieser Summe kleiner als $a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}\ldots+a_n$.

Erster Beweis.

Die ganze Function

$$X=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}\ldots+A_n,$$

wo $A_1, A_2\ldots A_n$ und x beliebig reell oder imaginär sein können, A_n aber nicht Null sein soll, nimmt, wenn

$$A_1=a_1.[\cos\alpha_1+i.\sin\alpha_1],$$
$$A_2=a_2.[\cos\alpha_2+i.\sin\alpha_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=a_n.[\cos\alpha_n+i.\sin\alpha_n$$

und

$$x=r.[\cos\varphi+i.\sin\varphi]$$

gesetzt wird, (nach 4)) folgende Form an:

$$r^n.[\cos(n\varphi)+i.\sin(n\varphi)]+a_1r^{n-1}.[\cos[\alpha_1+(n-1)\varphi]+i.\sin[\alpha_1+(n-1)\varphi]]$$
$$+a_2r^{n-2}.[\cos[\alpha_2+(n-2)\varphi]+i.\sin[\alpha_2+(n-2)\varphi]]\ldots+a_n.[\cos\alpha_n+i.\sin\alpha_n]$$

und erleidet nirgends eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit. Ist daher (nach 2.) der Punct M der Repräsentant von X für irgend reelle Werthe von r und φ, so wird derselbe seine Lage stetig ändern müssen, wenn r und φ zugleich oder einzeln sich stetig ändern. Stellt man sich nun r constant vor, und dem Bogen φ nach und nach alle stetig grösser oder kleiner werdenden Werthe, von irgend

einem φ' an, beigelegt, so muss der Punct M nothwendig eine stetige Curve beschreiben und bei $\varphi = \varphi' + 2.m\pi$, wo m irgend eine ganze Zahl ist, in dieselbe Lage kommen, wie bei $\varphi = \varphi'$. Diese Curve ist also eine in sich selbst zurückkehrende, und der Punct M kommt schon in alle möglichen Lagen auf ihr, wenn φ nur alle stetig sich folgenden Werthe eines Intervalls von 2π annimmt. Jedem Werthe von r, zwischen o und ∞, entspricht eine solche Curve, und alle gehen durch stetige Aenderung aus einer derselben hervor, wenn r stetig sich ändernd angenommen wird. Legt man dem r einen so grossen Werth bei, dass der Modul r^n des ersten Gliedes von X vielmal grösser wird als der Modul der Summe aller folgenden Glieder (5), so wird der Winkel, den die beiden Richtungen OM und ON bilden, wo N der Repräsentant des ersten Gliedes ist, bei jedem Werthe von φ um so kleiner sein, je grösser r ist. Der Punct N macht aber n Umläufe in einerlei Richtung auf der Peripherie des um O mit dem Halbmesser r^n beschriebenen Kreises, während φ ein Intervall von 2π durchläuft: es muss also der Punct M, bei einem hinreichend grossen Werthe von r, eine stetige, in sich selbst zurückkehrende Curve beschreiben, welche den Punct O $n$mal umschlingt, während φ um 2π stetig zu- oder abnimmt. Stellt man sich r, von diesem hinreichend grossen Werthe an, stetig abnehmend vor, so wird die Curve sich stetig ändern, bis zuletzt bei $r=0$ alle Puncte derselben in A zusammenfallen, wenn A der Repräsentant des letzten Gliedes ist. Diese Curve, welche Anfangs $n$mal den Punct O umschlingt, kann sich aber nicht auf den Punct A zusammenziehen, ohne vorher im Allgemeinen wenigstens $n$mal durch den Punct O gegangen zu sein. Da aber, wo ein Punct der Curve mit O zusammenfällt, sind die ihm entsprechenden Werthe von r und φ so, dass sie X zu Null machen.

Es giebt also, im Allgemeinen wenigstens, n Wurzeln der Gleichung

$$X = 0,$$

und wenn auch in besondern Fällen eine oder mehrere Schlingen der Curve gleichzeitig im Puncte O verschwänden, so gäbe es dennoch wenigstens eine Wurzel dieser Gleichung.

Zweiter Beweis.

Die ganze Function

$$X = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \ldots + A_n,$$

wo A_n nicht Null sein soll, lässt sich auf die Form

$$r^n.[\cos(n\varphi) + i.\sin(n\varphi)] + a_1 r^{n-1}.[\cos[\alpha_1 + (n-1)\varphi] + i.\sin[\alpha_1 + (n-1)\varphi]]$$
$$+ a_2 r^{n-2}.[\cos[\alpha_2 + (n-2)\varphi] + i.\sin[\alpha_2 + (n-2)\varphi]] \ldots + a_n.[\cos\alpha_n + i.\sin\alpha_n]$$

bringen, und letzterer Ausdruck lässt sich selbst wieder in $R.[\cos\Phi + i.\sin\Phi]$ zusammenfassen, wo jedoch Φ seine Bedeutung verliert, so wie R Null wird. Mit Ausnahme dieses Falles erleiden aber R und Φ nothwendig stetige Aenderungen, wenn r und φ sich stetig ändern, und bei constantem r kehren die Werthe von R, $\cos\Phi$ und $\sin\Phi$ periodisch wieder, wenn φ stetig zu- oder abnimmt, da sie für $\varphi = \varphi' \pm 2\pi$ dieselben sind, wie für $\varphi = \varphi'$. Während also φ ein Intervall von 2π durchläuft, und R dabei nicht Null wird, muss Φ sich stetig und so ändern, dass seine, dem Anfange und Ende des Intervalls entsprechenden Werthe die nämlichen sind, oder sich um eine gerade Anzahl π von einander unterscheiden; und dieser Unterschied muss nothwendig derselbe bleiben für alle Werthe von r zwischen zwei Grenzen, innerhalb deren kein Werth von r existirt, für welchen R Null werden kann, da, wenn φ constant ist, Φ sich ebenfalls stetig ändern muss, wenn r innerhalb der letztern Grenzen sich stetig ändert. Wäre genannter Unterschied für irgend zwei Werthe von r nicht mehr der nämliche, so müsste zwischen ihnen wenigstens *ein* Werth von r vorhanden sein, für welchen R Null würde, während φ ein Intervall von 2π durchläuft.

Es liegen nun aber $\cos\Phi$ und $\sin\Phi$ bezüglich um so näher an $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$, je grösser r ist, und fallen bei $r = \infty$ mit ihnen zusammen; es muss also Φ, bei einem hinreichend grossen Werthe von r, um $2n\pi$ sich ändern, während φ um 2π zu oder abnimmt. Ist hingegen r sehr klein, so liegen $\cos\Phi$ und $\sin\Phi$ bezüglich um so näher an $\cos\alpha_n$ und $\sin\alpha_n$, je kleiner r ist, so dass dann Φ immer fast denselben Werth behält und daher der dem Anfang und Ende des Intervalls von 2π entsprechende Werth von Φ Null wird. Es muss also zwischen den Grenzen 0 und ∞ nothwendig wenigstens einen Werth von r geben, für welchen R Null wird, während φ ein Intervall von 2π durchläuft. Es giebt also wenigstens einen Werth von der Form $r.[\cos\varphi + i.\sin\varphi]$ von x, welcher die Gleichung

$$X = 0$$

befriedigt.

Anmerkung. Die bei dem ersten Beweise gebrauchte Betrachtungsart giebt ein Mittel an die Hand, die Wurzeln der höhern Gleichungen mittels eines Apparats mechanisch zu finden. Ein solcher Apparat würde aber freilich seine Gebrechen mit den zu ähnlichen Zwecken angewandten theilen.

17.

Ueber die Summirung der beiden Reihen

(a) $\gamma_0 - n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 - \text{etc.} + (-1)^n\gamma_n$,

(b) $\gamma_0 + n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \text{etc.} + \gamma_n$,

in welchen die Grössen γ willkührlich und die Coefficienten Binomialcoefficienten des ganzen Exponenten n sind, mittels höherer Differenzen und Summen.

(Von dem Herrn Gymnasiallehrer *F. Arndt* zu Stralsund.)

In *Grunerts Archiv für Mathematik und Physik* Theil IV. S. 436 — 40 habe ich für das $n$fache Integral von $\log x.dx$ den Ausdruck

$$\text{(c)} \qquad \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left\{\log x - \sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{s}\right\} + \frac{c_1 x^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \frac{c_2 x^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + \text{etc.} + c_{n-1}x + c_n,$$

gefunden, wo $c_1, c_2, \text{etc.}\ c_n$ die n, durch successive Integration herbeigeführten Constanten sind, welche, so lange willkührlich bleiben, als nicht die untere Integrationsgrenze für jedes Integral gegeben ist.

Der Zweck einer Reihensummirung macht nun den Fall einer besondern Beachtung werth, wenn alle Integrale für $x=1$ verschwinden.

Man nehme also das Integral (c) zwischen den Grenzen 1 und x, so wird, wenn man die Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\text{etc}+\frac{1}{n}$ kurz durch s_n bezeichnet:

$$\frac{c_1}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{c_2}{1.2\ldots(n-2)} + \text{etc.} + c_{n-1} + c_n = \frac{1}{1.2\ldots n}s_n$$

oder, für $\gamma_k = 1.2.3\ldots k\ c_k$, nach und nach

$$\begin{aligned} s_n &= n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + n_3\gamma_3 + \text{etc.} + \gamma_n, \\ s_{n-1} &= (n-1)_1\gamma_1 + (n-1)_2\gamma_2 + (n-1)_3\gamma_3 + \text{etc.} + \gamma_{n-1}, \\ s_{n-2} &= (n-2)_1\gamma_1 + (n-2)_2\gamma_2 + (n-2)_3\gamma_3 + \text{etc.} + \gamma_{n-2}, \end{aligned}$$

u. s. w.

Dies sind n Gleichungen, durch welche die Constanten γ zu bestimmen sind.

Multiplicirt man, dieser Bestimmung wegen, die Gleichungen der Reihe nach mit $1, -n_1, n_2, -n_3,$ u. s. w., und addirt die Producte, so erhält man

$$\begin{aligned} s_n - n_1 s_{n-1} + n_2 s_{n-2} - \text{etc.} + (-1)^{n-1} n_{n-1} s_1 \\ = \gamma_1 \{n_1 - n_1(n-1)_1 + n_2(n-2)_1 - \text{etc.} + (-1)^{n-1} n_{n-1}\} \\ + \gamma_2 \{n_2 - n_1(n-1)_2 + n_2(n-2)_2 - \text{etc.} + (-1)^{n-2} n_{n-2}\} \\ + \text{etc.} \\ + \gamma_n. \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich $n_m - n_1(n-1)_m + n_2(n-2)_m - \text{etc.} = 0$, wenn $n > m$: also verschwinden die Coefficienten von $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{n-1}$, und es ergiebt sich

$$\gamma_n = s_n - n_1 s_{n-1} + n_2 s_{n-2} - \text{etc.} + (-1)^{n-1} n_{n-1} s_1,$$

und dem Obigen zufolge

$$c_n = \frac{1}{1.2\ldots n}(s_n - n_1 s_{n-1} + n_2 s_{n-2} - \text{etc.} + (-1)^{n-1} n_{n-1} s_1).$$

Geht man von der bekannten Grundreihe

$$1 - z + \tfrac{1}{2}(1-z)^2 + \tfrac{1}{3}(1-z)^3 + \text{etc.} = -\log z,$$

aus, die für jedes positive z convergirt, welches die Einheit nicht übersteigt, und integrirt n mal hintereinander, so ist, da alle Integrale für $z = 1$ verschwinden, dem Vorhergehenden gemäss:

$$\text{(d)} \quad \frac{(1-z)^{n+1}}{1\ldots(n+1)} + \frac{(1-z)^{n+2}}{2\ldots(n+2)} + \frac{(1-z)^{n+3}}{3\ldots(n+3)} + \text{etc.}$$

$$= (-1)^{n-1} \left\{ \begin{aligned} (\log z - s_n) \cdot \frac{z^n}{1\ldots n} + \frac{s_1}{1} \cdot \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \\ + \frac{s_2 - 2\Sigma_1}{1.2} \cdot \frac{z^{n-2}}{1\ldots(n-2)} \\ + \text{etc.} \\ + \frac{\Sigma_n - n_1\Sigma_{n-1} + \text{etc.}\ (-1)^{n-1} n_{n-1} \Sigma_1}{1.2.3\ldots n} \end{aligned} \right\}$$

Lässt man z sich der Null nähern, so entsteht die Grenzgleichung

$$(e)\qquad \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}+\frac{1}{2.3\ldots(n+2)}+\frac{1}{3.4\ldots(n+3)}+\text{ in inf.}$$
$$=(-1)^{n-1}\left[\frac{s_n-n_1 s_{n-1}+\text{ etc. }+(-1)^{n-1}n_{n-1}s_1}{1.2.3\ldots n}\right]$$

Nun ist bekannt, dass die Summe links den Werth $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1.2\ldots n}$ hat, also entsteht die Gleichung

$$(f)\qquad s_n-n_1 s_{n-1}+n_2 s_{n-2}-\text{ etc. }+(-1)^{n-1}n_{n-1}s_1=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Diese merkwürdige Gleichung suchte ich *direct* zu erweisen. Die gefundene Beweisart erstreckte sich überhaupt auf die allgemeinere Reihen (a) und (b), deren Betrachtung viele und, wie ich glaube, meistens neue analytische Gleichungen gab und der Hauptgegenstand dieser Abhandlung sein wird.

Zieht man von jedem Gliede der Grundreihe

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \text{etc.}$$

das nächst folgende ab, nennt die dadurch entstehende neue Reihe von Gliedern erste Differenzenreihe, verfährt mit dieser ebenso u. s. f., so wird, wie bekannt, das erste Glied der $n$ten Differenzenreihe, also die $n$te Differenz von $\gamma_0(\Delta^n.\gamma_0)$, durch den Ausdruck

$$(\alpha)\qquad \gamma_0-n_1\gamma_1+n_2\gamma_2-\text{ etc. }+(-1)^n\gamma_n.$$

dargestellt. Addirt man zu jedem Gliede der Grundreihe das nächst folgende, verfährt mit der daraus hervorgehenden neuen Reihe ebenso, und so fort, so findet man auf dieselbe Weise

$$(\beta)\qquad \gamma_0+n_1\gamma_1+n_2\gamma_2+\text{ etc. }+\gamma_n$$

als erstes Glied der $n$ten Summenreihe, oder als $n$te *Summe*, die wir durch $\Sigma^n.\gamma_0$ bezeichnen wollen.

Ist nun die Grundreihe von der Art, dass die $n$te Differenz oder die $n$te Summe von γ_0 sich einfach angeben lässt, so hat man auch die Summen (α) und (β) durch einen einfachen Ausdruck dargestellt.

Dieses Princip werde ich auf einige Grundreihen anwenden.

I. Es sei die Reihe

$$s_k,\ s_{k-1},\ s_{k-2},\ s_{k-3},\ \text{etc.}$$

gegeben. Man findet $\Delta . s_k = \frac{1}{k}$, $\Delta^2 . s_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{k(k-1)}$, $\Delta^3 . s_k = -\frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{(k-1)(k-2)} = \frac{1.2}{k(k-1)(k-2)}$, und allgemein $\Delta^n . s_k = (-1)^{n-1} . \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{k(k-1)\ldots(k-n+1)}$. Also ist

$$1. \quad s_k - n_1 s_{k-1} + n_2 s_{k-2} - \text{etc.} + (-1)^n s_{k-n} = (-1)^{n-1} . \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{k(k-1)\ldots(k-n+1)} = (-1)^{n-1} . \frac{1}{n} . \frac{1}{k_n}.$$

Für $k = n$ geht diese Gleichung in die besondere

$$1) \quad s_n - n_1 s_{n-1} + n_2 s_{n-2} - \text{etc.} + (-1)^{n-1} s_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

über, welche schon oben aufgestellt ist und welche mich zu dieser Abhandlung veranlasste.

II. Die Grundreihe sei die geometrische Progression

$$x^n, \; x^{n-1}, \; x^{n-2}, \; \text{etc.}$$

(A) Durch wiederholte Differenzenbildung entsteht $\Delta . x^n = x^n - x^{n-1} = x^{n-1}(x-1)$, $\Delta^2 . x^n = x^{n-1}(x-1) - x^{n-2}(x-1) = x^{n-2}(x-1)^2$; überhaupt $\Delta^n . x^n = (x-1)^n$, also ist

$$2. \quad x^n - n_1 x^{n-1} + n_2 x^{n-2} - \text{etc.} + (-1)^n = (x-1)^n.$$

(B) Durch wiederholtes Summiren dagegen entsteht $\Sigma . x^n = x^n + x^{n-1} = x^{n-1}(x+1)$, $\Sigma^2 . x^n = x^{n-1}(x+1) + x^{n-2}(x+1) = x^{n-2}(x+1)^2$, $\Sigma^n . x^n = (x+1)^n$, folglich ist

$$3. \quad x^n + n_1 x^{n-1} + n_2 x^{n-2} + \text{etc.} + 1 = (x+1)^n.$$

Setzt man $x = \frac{a}{b}$, so ergiebt sich

$$4. \quad a^n - n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 - \text{etc.} = (a-b)^n,$$

$$5. \quad a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \text{etc.} = (a+b)^n,$$

welche Gleichungen den *binomischen Lehrsatz* für positive ganze Exponenten enthalten.

III. Bilden die Grössen

$$\gamma_0, \; \gamma_1, \; \gamma_2, \; \text{etc.}$$

eine arithmetische Progression von einer niedrigeren Ordnung als der $n$ten, so verschwindet die $n$te Differenz, und man erhält folgendes allgemeine Theorem:

Die Summe

$$\gamma_0 - n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 - \text{etc.} + (-1)^n\gamma_n$$

verschwindet jederzeit, wenn die Grössen γ eine arithmetische Progression von einer niedrigeren Ordnung als der $n$ten bilden.

Die Reihe

$$x^m,\ (x+h)^m,\ (x+2h)^m,\ \text{etc.}$$

ist eine arithmetische Progression von der $m$ten Ordnung, denn es ist $\Delta.x^m = x^m - (x+h)^m = -m_1 x^{m-1} h - m_2 x^{m-2} h^2 - m_3 x^{m-3} h_3 \ldots$, also ist $\Delta^m.x^m = -mh\,\Delta^{m-1}.x^{m-1}$. Da nun $\Delta.x = -h$, so ist $\Delta^2.x^2 = 1.2h^2$, $\Delta^3.x^3 = -1.2.3.h^3$, $\Delta^m.x^m = (-1)^m 1.2\ldots mh^m$, und alle höhern Differenzen verschwinden. Daher ist

$$6.\quad x^m - n_1(x+h)^m + n_2(x+2h)^m - \ldots + (-1)^n(x+nh)^m = 0,$$

für ein positives ganzes m, welches kleiner als h ist; ferner ist

$$7.\quad x^n - n_1(x+h)^n + n_2(x+2h)^n - \ldots + (-1)^n(x+nh)^n = (-1)^n.1.2.3\ldots nh^n;$$

welches bekannte Gleichungen sind.

IV Die Reihe sei

$$\sin \alpha x,\quad \sin(\alpha-h)x,\quad \sin(\alpha-2h)x,\quad \text{etc.}$$

(A) Es ist $\Delta.\sin\alpha x = \sin\alpha x - \sin(\alpha-h)x = 2\sin\frac{1}{2}hx\cos(\alpha-\frac{1}{2}h)x$, $\Delta^2.\sin\alpha x = 2\sin\frac{1}{2}hx\{\cos(\alpha-\frac{1}{2}h)x - \cos(\alpha-\frac{3}{2}h)x\} = -(2\sin\frac{1}{2}hx)^2 \sin(\alpha-h)x$. Die zweite Differenz geht also aus der ursprünglichen Function hervor, wenn man $\alpha - h$ statt h setzt und noch mit der Constanten $-(2\sin\frac{1}{2}hx)^2$ multiplicirt. Daher ist $\Delta^4.\sin\alpha x = (2\sin\frac{1}{2}hx)^4\sin(\alpha-2h)x$, $\Delta^6.\sin\alpha x = -(2\sin\frac{1}{2}hx)^6\sin(\alpha-3h)x$, und allgemein

$$\Delta^{2k}.\sin\alpha x = (-1)^k(2\sin\tfrac{1}{2}hx)^{2k}\sin(\alpha-kh)x.$$

Nimmt man nochmals die Differenz, so wird

$$\Delta^{2k+1}.\sin\alpha x = (-1)^k.(2\sin\tfrac{1}{2}hx)^{2k+1}\cos\left(\alpha-\frac{2k+1}{2}h\right)x.$$

Folglich ist

$$8.\quad \sin\alpha x - n_1\sin(\alpha-h)x + n_2\sin(\alpha-2h)x - \text{etc.} + \cos(-1)^n\sin(\alpha-nh)x = (-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin\tfrac{1}{2}hx)^n\sin(\alpha-\tfrac{1}{2}nh)x$$

für ein gerades n und

9. $\sin\alpha x - n_1 \sin(\alpha - h)x + n_2 \sin(\alpha - 2h)x - \text{etc.} + (-1)^n \sin(\alpha - nh)x$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\sin \tfrac{1}{2}hx)^n \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}nh)x$$

für ein ungerades n.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, wenn $\alpha = n$ und $h = 2$ ist. Es entstehen dann die Gleichungen

8) $\sin nx - n_1 \sin(n-2)x + \text{etc.}$ bis die Reihe abbricht $= 0$,

für *ein gerades* n und

9) $\sin nx - n_1 \sin(n-2)x + \text{etc.} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{n-1}{2}} \sin x = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin x^n$,

für *ein ungerades* n.

Die letzte Gleichung pflegt durch die *Moivre*'sche Formel erwiesen zu werden.

(B). Durch Summation erhält man für dieselbe Grundreihe

$$\Sigma . \sin\alpha x = \sin\alpha x + \sin(\alpha - h)x = 2\cos\tfrac{1}{2}hx \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}h)x,$$

so dass die erste Summe aus der gegebenen Function hervorgeht, wenn man $\alpha - \frac{1}{2}h$ statt α setzt und noch mit $2\cos\frac{1}{2}hx$ multiplicirt. Deshalb ist

$$\Sigma^n . \sin\alpha x = (2\cos\tfrac{1}{2}hx)^n \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}nh)x$$

und folglich

10. $\sin\alpha x + n_1 \sin(\alpha - h)x + n_2 \sin(\alpha - 2h)x + \ldots = (2\cos\frac{1}{2}hx)^n \sin(\alpha - \frac{1}{2}nh)x.$

Nimmt man $\alpha = n$ und $h = 2$, so ergiebt sich

10) $\sin nx + n_1 \sin(n-2)\alpha + n_2 \sin(n-4)\alpha + \text{etc.} = 0.$

V. Ist die Grundreihe

$$\cos\alpha x, \quad \cos(\alpha - h)x, \quad \cos(\alpha - 2h)x, \text{ etc.},$$

so hat man

(A) $\Delta . \cos\alpha x = -2\sin\frac{1}{2}hx \sin(\alpha - \frac{1}{2}h)x,$

$\Delta^2 . \cos\alpha x = -(2\sin\frac{1}{2}hx)^2 \cos(\alpha - h)x,$

also allgemein

$$\Delta^{2k} . \cos\alpha x = (-1)^k (2\sin\tfrac{1}{2}hx)^{2k} \cos(\alpha - kh)x$$

und, wenn man nochmals die Differenz nimmt,

$$\Delta^{2k+1} . \cos\alpha x = (-1)^{k+1} (2\sin\tfrac{1}{2}hx)^{2k+1} \sin\left(\alpha - \frac{2k+1}{2} h\right)x.$$

Daher ist

11. $\cos\alpha x - n_1 \cos(\alpha - h)x + n_2 \cos(\alpha - 2h)x - \ldots =$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} (2\sin\tfrac{1}{2}hx)^n \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}nh)x,$$

für *ein gerades* n und

12. $\cos\alpha x - n_1\cos(\alpha-h)x + n_2\cos(\alpha-2h)x - \ldots =$
$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}(2\sin\tfrac{1}{2}hx)^n\sin(\alpha-\tfrac{1}{2}nh)x,$$
für *ein ungerades* n.

Nimmt man wieder $\alpha = n$ und $h = 2$, so wird

11) $$\cos nx - n_1(\cos n-2)x + n_2\cos(n-4)x - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}n_{\frac{n}{2}-1}\cos 2x$$
$$+\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}}n_{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\sin x^n,$$
für ein *gerades* n und

12) $$\cos nx - n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}n_{\frac{n-1}{2}} = 0$$
für ein *ungerades* n.

(B) Die Summation giebt
$$\Sigma.\cos\alpha x = 2\cos\tfrac{1}{2}hx\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}h)x,$$
also allgemein
$$\Sigma^n.\cos\alpha x = (2\cos\tfrac{1}{2}hx)^n\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}nh)x$$
und man erhält

13. $\cos\alpha x + n_1\cos(\alpha-h)x + n_2\cos(\alpha-2h)x + \text{etc.} = (2\cos\tfrac{1}{2}hx)^n\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}nh)x.$

Setzt man $\alpha = n$ und $h = 2$, so ergiebt sich

13) $$\cos nx + n_1\cos(n-2)x + \ldots + n_{\frac{n}{2}-1}\cos 2x + \tfrac{1}{2}n_{\frac{n}{2}} = 2^{n-1}\cos x^n,$$
für ein *gerades* n und

(13) $$\cos nx + n_1\cos(n-2)x + \ldots + n_{\frac{n-1}{2}}\cos x = 2^{n-1}\cos x^n,$$
für ein *ungerades* n.

VI. Die Reihe sei
$$\overset{k}{q}_p,\quad (q\overset{k}{+}k)_p,\quad (q\overset{k}{+}2k)_p,\quad \text{etc.},$$
wo $\overset{k}{q}_p$ die Grössenform $\frac{q(q+k)(q+2k)\ldots[q+(p-1)k]}{1.2.3\ldots p}$ bedeutet, aus welcher der Binominalcoëfficient q_p hervorgeht, wenn man $k = -1$ setzt.

Es ist hier $\overset{k}{q}_p = (q\overset{k}{+}k)_p\cdot\frac{q}{q+pk}$, also
$$\Delta.\overset{k}{q}_p = -(q\overset{k}{+}k)_p\left\{1-\frac{q}{q+pk}\right\} = -(q\overset{k}{+}k)_p\cdot\frac{pk}{q+pk}.$$

Zieht man von dieser Grösse eine andere ab, die aus ihr hervorgeht, wenn man $q+k$ statt q setzt, so entsteht die zweite Differenz
$$\Delta^2.\overset{k}{q}_p = (q\overset{k}{+}2k)_p\cdot\frac{pk\cdot(p-1)k}{(q+pk)[q+(p+1)k]}.$$

Bildet man noch die dritte und vierte Differenz, so zeigt sich leicht das obwaltende Gesetz, welches durch die *Bernoulli*'sche Schlussart zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Man findet nämlich

$$\Delta^n . \overset{k}{q}_p = (q \overset{k}{+} nk)_p . \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(q+pk)\dots[q+(p+n-1)k]}(-1)^n k^n$$

$$= \frac{(q+nk)\dots[q+(n+p-1)k]}{1.2.3\dots p} . \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(q+pk)\dots[q+(p+n-1)k]}(-1)^n k^n.$$

$$= \frac{(q+nk\dots[q+(p-1)k]}{1.2.3\dots(p-n)}(-1)^n k^n = (q \overset{k}{+} nk)_{p-n}(-1)^n k^n.$$

Also ist

$$14. \quad \overset{k}{q}_p - n_1(q \overset{k}{+} k)_p + n_2(q \overset{k}{+} 2k)_p - \text{etc.} = (-1)^n k^n (q \overset{k}{+} nk)_{p-n};$$
wo $p \gtreqless n$ ist.

Setzt man $k = -1$, so ergiebt sich

$$14) \quad q_p - n_1(q-1)_p + n_2(q-2)_p - \text{etc.} = (q-n)_{p-n}.$$

Ist $p = n$, so hat man

$$14_\alpha) \quad q_n - n_1(q-1)_n + n_2(q-2)_n - \text{etc.} = 1.$$

Ist dagegen $q = n$, so erhält man

$14_\beta)$ $n_p - n_1(n-1)_p + n_2(n-2)_p - \text{etc.} = 0$, und nur $= 1$, wenn $n = p$ ist.

VII. Die Reihe sei

$$\overset{k}{q}_p, \quad k\overset{k}{q}_{p-1}, \quad k^2\overset{k}{q}_{p-2}, \text{ etc.}$$

Da hier $\overset{k}{q}_{p-1} = \overset{k}{q}_p . \frac{p}{q+(p-1)k}$, so ist

$$\Delta . \overset{k}{q}_p = \overset{k}{q}_p \left(1 - \frac{pk}{q+(p-1)k}\right) = \overset{k}{q}_p . \frac{q-k}{q+(p-1)k}.$$

Ferner ist

$$\Delta^2 . \overset{k}{q}_p = \overset{k}{q}_p . \frac{q-k}{q+(p-1)k} - k\overset{k}{q}_{p-1} . \frac{q-k}{q+(p-2)k} = \overset{k}{q}_p . \frac{q-k}{q+(p-1)k} . \frac{q-2k}{q+(p-2)k}.$$

So ist allgemein

$\Delta^n . \overset{k}{q}_p = \overset{k}{q}_p . \frac{(q-k)(q-2k)\dots(q-nk)}{q+(p-1)k\dots q+(p-n)k} = (q \overset{k}{-} nk)_p$, wie leicht zu finden.

Demnach ist

$$14. \quad \overset{k}{q}_p - n_1 k \overset{k}{q}_{p-1} + n_2 k^2 \overset{k}{q}_{p-2} - \text{etc.} + (-1)^n k^n \overset{k}{q}_{p-n} = (q \overset{k}{-} nk)_p,$$
wo $p \gtreqless n$ ist.

Dieses Theorem habe ich auf eine andere Weise schon in *Grunerts* Archiv III. Seite 256—58 gegeben.

Nimmt man $n = -1$, so erhält man

$$15.\quad q_p + n_1 q_{p-1} + n_2 q_{p-2} + \text{etc.} + q_{p-n} = (q+n)_p,$$

und für $q = n = p$:

$$(15)\quad (p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + \text{etc.} + (p_p)^2 = (2p)_p.$$

Dies ist der *Lagrange*'sche *Satz* für die Summe der Quadrate der Binominalcoëfficienten, für welchen bekanntlich viele verschiedenartige Beweise gegeben worden sind. Hier erscheint er als Corollar des allgemeinen durch die Gleichung 15. ausgedrückten Satzes.

VIII. Die Reihe sei

$$\overset{k}{q}_p,\quad k(q \overset{k}{+} k)_{p-1},\quad k^2(q \overset{k}{+} k)_{p-2},\quad \text{etc.}$$

Hier ist $(q \overset{k}{+} k)_{p-1} = \overset{k}{q}_p \cdot \frac{p}{q}$, also durch Summation

$$\Sigma \cdot \overset{k}{q}_p = \overset{k}{q}_p \left(1 + \frac{kp}{q}\right) = \overset{k}{q}_p \cdot \frac{q+pk}{q}.$$

Ferner wird

$$\Sigma^2 \cdot \overset{k}{q}_p = \overset{k}{q}_p \cdot \frac{q+pk}{q} + k(q+k)_{p-1} \cdot \frac{q+pk}{q+k}$$

$$= \overset{k}{q}_p \cdot \frac{q+pk}{q} \left\{1 + \frac{pk}{q+k}\right\} = \overset{k}{q}_p \cdot \frac{q+pk}{q} \cdot \frac{q+(p+1)k}{q+k}.$$

Nimmt man die höhern Summen, so erhält man den allgemeinen Ausdruck

$$\Sigma^n \cdot \overset{k}{q}_p = \overset{k}{q}_p \cdot \frac{(q+pk)\cdot[q+(p+1)k] \dots [q+(p+n-1)k]}{q(q+k)(q+2k) \dots [q+(n-1)k]}$$

$$= \frac{q(q+k)\cdot[q+(p-1)k]}{1\cdot 2\cdot 3 \dots p} \cdot \frac{(q+pk) \dots [q+(p+n-1)k]}{q(q+k) \dots [q+(n-1)k]}$$

$$= \frac{(q+nk) \dots [q+(p-1)k]}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (p-n)} \cdot \frac{(q+pk) \dots [q+(p+n-1)k]}{p(p-1) \dots (p-n+1)}$$

$$= (q \overset{k}{+} nk)_{p-n} \cdot \frac{(q \overset{k}{+} pk)_n}{p_n}.$$

Also ist:

$$16.\quad \overset{k}{q}_p + n_1 k(q \overset{k}{+} k)_{p-1} + n_2 k^2 (q \overset{k}{+} 2k)_{p-2} + \text{etc.} = \frac{(q \overset{k}{+} nk)_{p-n} \cdot (q \overset{k}{+} pk)_n}{p_n}.$$

Setzt man $k = -1$, so ergiebt sich

$$16)\quad q_p - n_1(q-1)_{p-1} + n_2(q-2)_{p-2} - \text{etc.} = \frac{(q-n)_{p-n} \cdot (q-p)_n}{p}.$$

IX. Ist $\frac{1}{\overset{k}{q_p}}, \quad \frac{1}{\overset{k}{(q+k)_p}}, \quad \frac{1}{\overset{k}{(q+2k)_p}}$, etc.

die Grundreihe, so hat man, da $\frac{1}{\overset{k}{(q+k)_p}} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{q}{q+pk}$ ist,

$$\Delta\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}(q+pk)}\cdot pk,$$

folglich

$$\Delta^2\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}(q+pk)}\,pk - \frac{1}{\overset{k}{(q+k)_p}[q+(p+1)k]}\cdot pk$$

$$= \frac{1}{\overset{k}{q_p}(q+pk)}\,pk\left\{1-\frac{q}{q+(p+1)k}\right\} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}(q+pk)[q+(p+1)k]}\cdot p(p+1)k^2.$$

Auf diese Weise ergiebt sich die allgemeine Relation

$$\Delta^n\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}(q+pk)\dots[q+(p+n-1)k]}\cdot p(p+1)\dots(p+n-1)k^n,$$

deren Wahrheit durch die *Bernoulli*'sche Schlussweise leicht dargethan wird. Der Ausdruck rechts lässt sich aber noch auf eine andere Form bringen. Es ist nämlich

$$\Delta^n\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1\cdot2\cdot3\dots n}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\dots n}{(q+pk)\dots[q+(p+n-1)k]}\,k^n$$

$$= \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{(p+n-1)_n}{\overset{k}{(q+pk)_n}}\,k^n,$$

also ist

$$17.\quad \frac{1}{\overset{k}{q_p}} - n_1\frac{1}{\overset{k}{(q+k)_p}} + n_2\frac{1}{\overset{k}{(q+2k)_p}} - \text{etc.} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{(p+n-1)_n}{\overset{k}{(q+pk)_n}}\,k^n,$$

und für $k=-1$:

$$17)\quad \frac{1}{q_p} - n_1\cdot\frac{1}{(q-1)_p} + n_2\cdot\frac{1}{(q-2)_p} - \text{etc.} = \frac{1}{q_p}\cdot\frac{(p+n-1)_n}{(q-p)_n}(-1)^n.$$

X. Die Reihe sei

$$\frac{1}{\overset{k}{q_p}}, \quad \frac{1}{k\overset{k}{q_{p-1}}}, \quad \frac{1}{k^2\overset{k}{q_{p-2}}}. \quad \text{etc.}$$

Es ist $\frac{1}{\overset{k}{q_{p-1}}} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{q+(p-1)k}{p}$, folglich

$$\Delta\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\left\{1-\frac{q+(p-1)k}{pk}\right\} = -\frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{q-k}{pk}.$$

Ferner wird

$$\Delta^2\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}} = -\frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{q-k}{pk} + \frac{1}{\overset{k}{q_{p-1}}}\cdot\frac{q-k}{(p-1)k^2} = -\frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{q-k}{pk}\left\{1-\frac{q+(p-1)k}{(p-1)k}\right\}$$
$$= \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{q-k}{pk}\cdot\frac{q}{(p-1)k}.$$

Allgemein wird

$$\Delta^n\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}} = (-1)^n\cdot\frac{1}{k^n}\cdot\frac{(q-k)\,q(q+k)\,\ldots\,q+(n-2)k}{\underset{k}{p(p-1)\,\ldots\,(p-n+1)}}\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}}$$
$$= (-1)^n\cdot\frac{1}{k^n}\cdot\frac{\overset{k}{(q-k)_n}}{p_n}\cdot\frac{1}{\overset{k}{q_p}}.$$

Daher ist

$$18.\quad \frac{1}{\overset{k}{q_p}} - n_1\frac{1}{k\overset{k}{q_{p-1}}} + n_2\frac{1}{k^2\overset{k}{q_{p-2}}} - \text{etc.} = \frac{(-1)^n}{k^n}\cdot\frac{\overset{k}{(q-k)_n}}{p_n\overset{k}{q_p}},$$

und für $k=-1$

$$18)\quad \frac{1}{q_p} + n_1\frac{1}{q_{p-1}} + n_2\frac{1}{q_{p-2}} + \text{etc.} = \frac{(q+1)_n}{p_n\,q_p}.$$

XI. Die gegebene Reihe sei endlich

$$\frac{1}{\overset{k}{q_p}},\quad \frac{1}{k\overset{k}{(q+k)_{p-1}}},\quad \frac{1}{k^2\overset{k}{(q+2k)_{p-2}}},\quad \text{etc.}$$

Es ist $\dfrac{1}{\overset{k}{(q+k)_{p-1}}} = \dfrac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\dfrac{q}{p}$, also $\Sigma\cdot\dfrac{1}{\overset{k}{q_p}}\left\{1+\dfrac{q}{pk}\right\} = \dfrac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\dfrac{kp+q}{kp}$.

Ferner $\Sigma^2\cdot\dfrac{1}{\overset{k}{q_p}} = \dfrac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\dfrac{kp+q}{kp} + \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{\overset{k}{(q+k)_{p-1}}}\cdot\dfrac{kp+q}{k(p-1)}$

$$= \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{kp+q}{kp}\left\{1+\frac{q}{k(p-1)}\right\} = \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{kp+q}{kp}\cdot\frac{k(p-1)+q}{k(p-1)}.$$

Das obwaltende Gesetz fällt in die Augen. Man erhält

$$\Sigma^n\cdot\frac{1}{\overset{k}{qp}} = \frac{1}{\overset{k}{qp}}\cdot\frac{(q+pk)\,[q+(p-1)k]\,..\,[q+(p-n+1)k]}{p(p-1)\,\ldots\,(p-n+1)}\cdot\frac{1}{k^n}$$
$$= \frac{1}{\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{1}{k^n}\cdot\frac{\overset{k}{[q+(p-n+1)k]_n}}{p_n}.$$

Daher ist

$$19.\quad \frac{1}{\overset{k}{q_p}} + \frac{1}{k\overset{k}{(q+k)_{p-1}}} + \frac{1}{k^2\overset{k}{(q+2k)_{p-2}}} + \text{etc.} = \frac{1}{k^n\overset{k}{q_p}}\cdot\frac{\overset{k}{[q+(p-k+1)k]_n}}{p_n},$$

und für $k=-1$:

$$19)\quad \frac{1}{q_p} - \frac{1}{(q-1)_{p-2}} + \frac{1}{(q-2)_{p-2}} - \text{etc.} = (-1)^n\cdot\frac{1}{q_p}\cdot\frac{[q-(p-n+1)]_n}{p_n}.$$

Stralsund den 20. Januar 1845.

18.

Nova solutio problematis determinandi multitudinem numerorum, qui ad numerum aliquem sint primi eoque minores.

(*Auctore Friderico Arndt, Sundiae.*)

Miretur fortasse aliquis, quod problematis ab Ill. geometris, *Eulero, Gaussio, Grunerto,* aliisque jam soluti, novam disquisitionem instituam. *Euleri* quidem solutio, de qua confer. Nov. Comm. Acad. Petrop. T. VIII. p. 74. et Nov. Act. Petrop. T. VIII. p. 17., non sine multis ambagibus perficitur, qua de causa *Gaussius* in Disq. Arith. Lips. 1801. p. 30. et *Grunertus* in Opere „Archiv der Mathematik etc. T. III. n. XX. aliam tamque simplicem viam inierunt, ut nihil amplius in hac re desiderandum esse videatur. Sed quum novae solutiones novam saepissime lucem alicujus rei afferant, solutionem, quam inveni, quod in lucem proferam, a lectore benigno, ut excuset, peto.

1.

Si numerus propositus est potestas aliqua numeri primi, scilicet p^n, omnes numeri ad eum primi sunt ii, qui factorem p non involvant. Quorum multitudo quum sit $p-1$ inter limites 1 et p, eademque inter limites p et $2p$, $2p$ et $3p$, etc., manifesto multitudo talium numerorum ipso p^n minorum erit $p^{n-1}(p-1)$ vel $p^n\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

2.

Theorema. Si numeri a, b *sunt inter se primi, designatque omnino* φN *multitudinem numerorum ad* N *primorum eoque minorum, erit*

$$\varphi(ab) = \varphi a \times \varphi b.$$

Demonstrationem hujus theorematis, quod ipsum in Disq. Arith. legiter hoc modo institutuo.

a) Quando x ad a, y ad b primus est, residuum minimum summae $ay+bx$ secundum modulum ab ad hunc ipsum *primum* esse debet.

Si enim illud residuum, quod per r designemus, et modulus ab factorem aliquem primum ϑ simul haberent, manifesto ϑ numerum $ay + bx$ metiretur. Atqui alter certe numerorum a, b factorem ϑ involveret, ex. gr. a, ergo hic factor numerum bx metiretur. Quia autem x ad a primus est, x per ϑ non potest esse divisibilis, ideoque ϑ factor esset numeri b, quod fieri nequit, quoniam a et b sunt inter se primi. Ergo residuum r ad ab primum est.

b) Quando pro numero x ponunter omnes numeri ad a primi eoque minores, pro y autem omnes ad b primi eoque minores, residua minima exortarum inde summarum $ay + bx$ secundum modulum ab inaequalia esse debent.

Nam si esset $ay + bx \equiv ay' + bx'$ (mod. ab), haberetur $a(y-y') + b(x-x') \equiv o$(mod. a), ergo $b(x-x') \equiv o$(mod. a), ideoque $x - x' \equiv o$ (mod. a), quod fieri nequit, si differentia $x - x'$ ipso a est minor.

c) Duo quique numeri resp. ad a et b primi sunt $x' + ka$ et $y' + \lambda 6$, ita ut sit $x' < a$ ad eumque primus, $y' < b$ et ad eum primus. Valoribus his pro x et y positis habetur $ay + bx = ay' + bx' + (k + \lambda)ab$, i. e. $ay + bx \equiv ay' + bx'$ (mod. ab). Ex quo sequitur, omnia nasci residua diversa summae $ay = bx$, si pro x, y accipiantur resp. omnes numeri ad singulos a, b primi iisque inferiores.

d) Si igitur determinantur residua minima summae $ay + bx$ sec. mod. ab, dum pro x et y sumantur omnes numeri resp. ad a et b primi iique inter se combinentur, habebuntur $\varphi a \times \varphi b$ numeri diversi ad ab primi eoque inferiores.

e) Quando numerus r ad ab primus est, semper numeri x, y, quorum alter ad a, alter ad b primus, inveniri possunt, congruentiae satisfacientes

$$ay + bx \equiv r \text{ (mod } ab).$$

Quum enim b sit ad a primus, congruentiam

$$bx \equiv r \text{ (mod. } a)$$

resolvi posse constat, quo loco, ut facile patebit, x ad a primus erit. Similimodo congruentia

$$ay \equiv r \text{ (mod. } b)$$

resolvi potest, eritque y ad b primus.

Propter primam congruentiam $bx - r$ per a divisibilis est, ergo etiam $ay + bx - r$; propter secundam simili modo $ay + bx - r$ per b divisibilis

est. Itaque, quum a et b sint inter se primi, modulus ab numerum $ay+bx-r$ metietur, i. e. $ay+bx \equiv r$ (mod. ab).

f) Sequitur ex d) et e) multitudinem omnium numerorum ad ab primorum eoque minorum esse $\varphi a \times \varphi b$.

3.

Jam facile intelligitur, esse pro quotiunque factoribus

$$\varphi(abc\ldots) = \varphi a \times \varphi b \times \varphi c \ldots.,$$

dummodo duo quique novum factorum sint inter se primi.

4.

Numero igitur quocunque N in factores primos resoluto, ita ut sit

$$N = A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots.,$$

ex 3. habetur $\varphi N = \varphi(A^\alpha).\varphi(B^\beta).\varphi(C^\gamma)\ldots.$, ergo ex 1.

$$\varphi N = A^{\alpha-1}(A-1).B^{\beta-1}(B-1).C^{\gamma-1}(C-1)\ldots.,$$

$$\text{vel } \varphi N = N\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right)\left(1-\frac{1}{C}\right)\ldots.$$

Scrib. Sundiae d. 8. M. Mart, 1845.

19.

Entwickelung der Summe der $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen nach den Potenzen des Index mittelst des Taylorschen Lehrsatzes.

(Von dem Herrn Gymnasiallehrer *Arndt* zu Stralsund.)

Die Summe $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + x^n$, als Function des Index x betrachtet, in eine nach den Potenzen dieser Veränderlichen fortschreitende Reihe zu entwickeln, ist der Zweck dieses Aufsatzes. n ist eine positive ganze Zahl.

Zunächst ist die Möglichkeit der Entwickelung darzuthun. Bezeichnet man obige Summe durch Sx^n, so ist $(x+1)^n - x^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 \ldots + n_{n-1} x^{n-1}$, folglich, wenn man für x nach und nach $1, 2, 3, \ldots x$ setzt und alle daraus resultirenden Gleichungen addirt: $(x+1)^n - 1 = x + n_1 Sx + n_2 Sx^2 +$ cett. $+ n_{n-1} Sx^{n-1}$. Daraus folgt, dass Sx^n eine *ganze rationale Function vom* $(n+1)$*ten Grade* ist und die Form

$$1. \quad Sx^n = A_{n+1} x^{n+1} + A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \text{etc.} + A_1 x,$$

hat, wo nun die bloss von n abhängigen Coëfficienten zu bestimmen sind.

Betrachtet man zu dem Ende den Ausdruck rechts als stetige Function von x und bezeichnet ihn durch $f(x)$, so ist nach *Taylors* Lehrsatz

$$2. \quad f(x) = \frac{f^{n+1}(0)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} x^{n+1} + \frac{f^n(0)}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n + \text{etc.} + f^1(0) x,$$

und folglich kommt es auf die Bestimmung der höhern Differentialquotienten der Function $f(x)$ an. Diese Bestimmung wird möglich durch die Relation

$$3. \quad f(x) - f(x-1) = x^n,$$

welche für $f(x) = Sx^n$ Statt haben muss. Nach dem *Taylor*schen Satze ist nämlich

$$f(x) - f(x-1) = (-1)^n \left[\frac{f^{n+1}(x)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} - \frac{f^n(x)}{1 \cdot 2 \ldots n} + \text{etc.} + (-1)^n f^1(x) \right] = x^n.$$

Differentiirt man diese Gleichung $k$mal nacheinander und beachtet, dass

da $f(x)$ eine algebraische Function vom $(n+1)$ten Grade ist, die Differentialquotienten $k$ter Ordnung von $f^{n+1}(x)$, $f^n(x)$, etc. bis zu $f^{n-k+2}(x)$ verschwinden, so erhält man

$$(-1)^{n-k}\left[\frac{f^{n+1}(x)}{1\cdot 2\ldots(n-k+1)} - \frac{f^n(x)}{1\cdot 2\ldots(n-k)} + \text{etc.} + (-1)^{n-k} f^{k+1}(x)\right]$$
$$= n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Daher ist für $x=0$:

$$4.\quad \frac{f^{n+1}(0)}{1\cdot 2\ldots(n-k+1)} - \frac{f^n(0)}{1\cdot 2\ldots(n-k)} + \frac{f^{n-1}(0)}{1\cdot 2\ldots(n-k-1)} - \text{etc.} + (-1)^{n-k} f^{k+1}(0) = 0,$$

so lange k nicht n ist. Für $k=n$ ergiebt sich dagegen die Gleichung

$$5.\quad f^{n+1}(0) = 1.2.3\ldots. n.$$

Aus der letztern Gleichung folgt $A_{n+1} = \frac{f^{n+1}(0)}{1\cdot 2\ldots(n+1)} = \frac{1}{n+1}$.

Ferner ist allgemein $\frac{f^{n+1-\lambda}(0)}{1\cdot 2\ldots(n+1-\lambda-k)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1-\lambda)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1-\lambda-k)} A_{n+1-\lambda}$

$$= (n+2-\lambda-k)(n+3-\lambda-k)\ldots(n+1-\lambda)A_{n+1-\lambda}$$
$$= 1.2\ldots k(n+1-\lambda)_k A_{n+1-\lambda},$$ folglich,

wenn man die Gleichung 4. durch $1.2.3\ldots k$ dividirt:

$$6.\quad (n+1)_k A_{n+1} - n_k A_n + (n-1)_k A_{n-1} - \text{etc.} + (-1)^{n-k}(k+1)_k A_{k+1} = 0;$$

welche Gleichung von $k=0$ bis $k=n-1$ gilt. Aus derselben folgt

$$(n+1)_{n-1} A_{n-1} - n_{n-1} A_n = 0,\quad \text{also, da } A_{n+1} = \frac{1}{n+1} \text{ ist,}\quad A_n = \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man die für A_{n+1} und A_n gefundenen Werthe in die Gleichung 6., so geht sie in

$$7.\quad n_k\cdot\frac{n-k-1}{2(n-k+1)} - (n-1)_k A_{n+1} + (n-2)_k A_{n-2} - \text{etc.}$$
$$+ (-1)^{n-k+1}(k+1)_k A_{k+1} = 0,$$

über, von $k=0$ bis $k=n-2$.

Die in dieser Relation noch enthaltenen Coëfficienten hängen von n ab. Setzt man jetzt $n-k$ statt k, so wird

$$8.\quad n_k\cdot\frac{k-1}{2(k+1)} - (n-1)_{k-1} A_{n-1} + (n-2)_{k-2} A_{n-2} - \text{etc.}$$
$$+ (-1)^{n+1}(n-k+1)_1 A_{n-k+1} = 0,$$

von $k=n$ bis $k=2$.

Da nun allgemein $(n-\lambda)_{k-\lambda} = n_k\cdot\frac{k_\lambda}{n_\lambda}$ ist, so entsteht

$$9. \quad \frac{k-1}{2(k+1)} - \frac{k_1}{n_1} A_{n-1} + \frac{k_2}{n_2} A_{n-2} - \text{etc.} + (-1)^{k+1} \frac{k_{k-1}}{n_{k-1}} A_{n-k+1} = 0,$$

oder, wenn man $A_{n-\lambda} = n_\lambda B_1$ nimmt:

$$10. \quad \frac{k-1}{2(k+1)} - k_1 B_1 + k_2 B_2 - k_3 B_3 - \text{etc.} + (-1)^{k+1} k_{k-1} B_{k-1} = 0,$$

und zugleich ist

$$11. \quad Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + n_1 B_1 x^{n-1} + n_2 B_2 x^{n-2} + \text{etc.} + n_{n-1} B_{n-1} x.$$

Nun lässt sich aber zeigen, dass die B mit *geraden* Zeigern verschwinden müssen.

Da nämlich $(x+1)^n = x^n + n_1 x^{n-1} + n_2 x^{n-2} + \ldots,$

$(x-1)^n = x^n - n_1 x^{n-2} + n_2 x^{n-2} - \ldots,$

also durch Subtraction

$$(x+1)^n - (x-1)^n = 2(n_1 x^{n-1} + n_3 x^{n-3} + \ldots)$$

ist, so folgt, wenn man in dieser Gleichung x succ. $= 1, 2, 3, \ldots x$ setzt und dann alle Gleichungen addirt, auch zugleich $n+1$ statt n setzt:

$$(x+1)^{n+1} + x^{n+1} = 2(n+1)_1 Sx^n + 2(n+1)_3 Sx^{n-2} + \text{etc.}$$

Setzt man also

$$Sx^n = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots,$$
$$Sx^{n-2} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots,$$
$$Sx^{n-4} = c_0 x^{n-3} + c_1 x^{n-4} + \ldots, \text{ u. s. w.},$$

führt die Werthe rechts in obige Gleichung ein und entwickelt zugleich $(x+1)^{n+1} + x^{n+1}$ binomisch, so giebt die Coëfficientenvergleichung:

$$(n+1)_1 a_0 = 1,$$
$$(n+1)_1 a_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)_1,$$
$$(n+1)_1 a_2 + (n+1)_3 b_0 = \tfrac{1}{2}(n+1)_2,$$
$$(n+1)_1 a_3 + (n+1)_3 b_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)_3,$$
$$(n+1)_1 a_4 + (n+1)_3 b_2 + (n+1)_5 c_0 = \tfrac{1}{2}(n+1)_4,$$
$$(n+1)_1 a_5 + (n+1)_3 b_3 + (n+1)_5 c_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)_5,$$

u. s. w.

Daraus wird leicht geschlossen, dass $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = \tfrac{1}{2}$, $a_3 = b_3 = \ldots = 0$, $a_5 = b_5 = \ldots = 0$ etc.

Deshalb ist dann

$$12. \quad Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + n_1 B_1 x^{n-1} + n_3 B_3 x^{n-3} + \text{etc.},$$

und

$$13.\quad \frac{k-1}{2(k+1)} = k_1 B_1 + k_3 B_3 + k_5 B_5 + \ldots + k_{k-\mu} B_{k-\mu},$$

wo $\mu = 1$ oder $= 2$, jenachdem k *gerade* oder *ungerade* ist.

Diese Relation vereinfacht sich noch, wenn auf beiden Seiten mit $k+1$ multiplicirt wird. Man erhält

$$\frac{k-1}{2} = (k+1)_2 . 2 B_1 + (k+1)_4 . 4 B_3 + \ldots + (k+1)_{k-\mu+1} B_{k-\mu} (k-\mu+1),$$

oder für $2\lambda B_{2\lambda-1} = C_{2\lambda-1}$:

$$14.\quad \frac{k-1}{2} = (k+1)_2 C_1 + (k+1)_4 C_3 + \ldots (k+1)_{k-\mu+1} C_{k-\mu}.$$

Zugleich ist nun

$$15.\quad Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2} x^n + \tfrac{1}{2} n_1 C_1 x^{n-1} + \tfrac{1}{4} n_3 C_3 x^{n-3} + \text{etc.}$$

Die *Bernoulli*'schen *Zahlen* definirt man am einfachsten, wie mir scheint, durch die Relation

$$16.\quad \frac{k-1}{2} = (k+1)_2 \overset{1}{B} - (k+1)_4 \overset{3}{B} + (k+1)_6 \overset{5}{B} - \text{etc.}$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(k-\mu-1)} (k+1)_{k-\mu+1} \overset{k-\mu}{B}.$$

Vergleicht man dies mit 14., so erhält man endlich

$$17.\quad Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2} x^n + \tfrac{1}{2} \overset{1}{B} n_1 x^{n-1} - \tfrac{1}{4} \overset{3}{B} n_3 x^{n-3} + \tfrac{1}{6} \overset{5}{B} n_5 x^{n-5} - \ldots$$

Wenn n eine *gerade* Zahl ist, so ist das letzte Glied $(-1)^{\frac{1}{2}n-1} \frac{1}{n} \overset{n-1}{B} n_{n-1} x$,

dagegen $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)-1} . \frac{1}{n} \overset{n-2}{B} n_{n-2} x^2$, wenn n *ungerade* ist.

Stralsund, den 15. Februar 1845.

20.

Ueber die Bernoullische Methode summirbare Reihen zu finden.

(Von dem Herrn Gymnasiallehrer *Arndt* zu Stralsund.)

Die Schwierigkeiten bei der Summirung der Reihen veranlasste die Geometer bald, das Problem umzukehren, nämlich, summirbare Reihen zu suchen. Unter den verschiedenen hieher gehörenden Methoden ist eine der einfachsten diejenige, welche *Jacob Bernoulli* erdacht und *Mollweide* im mathematischen Wörterbuch (Artikel „Summirbare Reihe") mitgetheilt hat. Sie besteht einfach in Folgendem.

Wenn man von jedem Gliede der Reihe

$$\mu_0, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \ldots \mu_n$$

das nächst folgende abzieht, so ist die Summe der Differenzen

$$(\mu_0 - \mu_1) + (\mu_1 - \mu_2) + \text{etc.} + (\mu_{n-1} - \mu^n)$$

der Ueberschuss des ersten Gliedes der Grundreihe über das letzte, nämlich $\mu_0 - \mu_n$. Dieses Resultat ist enthalten in der Gleichung:

$$1. \quad \sum_{m=1}^{m=n} (\mu_{m-1} - \mu_m) = \mu_0 - \mu_n.$$

Jede beliebig angenommene Function des Index μ_m liefert demnach eine summirbare Reihe. Da sich aber die Anzahl der Functionen nicht erschöpfen lässt, so werde ich mich auf die bis jetzt in der Analysis am meisten angewandten beschränken und mein Augenmerk vorzüglich auf die Form q_n^k d. h. $\frac{q(q+k)\ldots[q+(p-1)k]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}$ richten, welche den Binominalcoëfficienten als besondern Fall in sich schliesst. Die Anwendung der Formel 1. auf besondere Fälle ist der Zweck dieser Arbeit, welche ihre Entschuldigung darin finden mag,

dass es wünschenswerth ist, im Besitz einer möglichst grossen Anzahl von Reihen zu sein, deren Summe bekannt ist.

§. 1.

Es sei $\mu_m = x^m$. Hier ist $\mu_{m-1} - \mu_m = x^{m-1}(1-x)$, $\mu_0 - \mu_n = 1 - x^n$, folglich

$$2.\quad \sum_{m=1}^{m=n} x^{m-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

§. 2.

Es sei $\mu_m = \sin(x + mh)$. Hier ist $\mu_{m-1} - \mu_m = -2\sin\frac{1}{2}h$ $\cos\left(x + \frac{2m-1}{2}h\right)$, $\mu_0 - \mu_n = -2\sin\frac{1}{2}nh\cos(x + \frac{1}{2}nh)$, folglich $\sum_{m=1}^{m=n}\cos\left(x + \frac{2m-1}{2}h\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h}\cos(x + \frac{1}{2}nh)$. Setzt man aber $x + \frac{1}{2}h = y$, und $n + 1$ statt n, so ergiebt sich

$$3.\quad \sum_{m=0}^{m=n}\cos(y + mh) = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)h}{\sin\frac{1}{2}h}\cos(y + \frac{1}{2}nh).$$

Setzt man in dieser Formel $\frac{1}{2}\pi + y$ statt y, so erhält man

$$4.\quad \sum_{m=0}^{m=n}\sin(y + mh) = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)h}{\sin\frac{1}{2}h}\sin(y + \frac{1}{2}nh),$$

welche Relation sich auch findet, wenn man von der Function $\mu_m = \cos(x + mh)$ ausgeht.

Die Annahme $\mu_m = \tang(x + mh)$ giebt ferner

$$5.\quad \sum_{m=1}^{m=n}\sec[x + (m-1)h]\sec(x + mh) = \frac{\sin nh}{\sin h}\sec x\sec(x + nh)$$

und, wenn man $\frac{1}{2}\pi + x$ statt x setzt,

$$6.\quad \sum_{m=1}^{m=n}\operatorname{cosec}[x + (m-1)h]\operatorname{cosec}(x + mh) = \frac{\sin nh}{\sin h}\operatorname{cosec}x\operatorname{cosec}(x + nh).$$

Endlich sei $\sec(x + mh)$ die angenommene Function. Hier findet sich nach einer leichten Rechnung

$$7.\quad \sum_{m=1}^{m=n}\frac{\sin[x + \frac{1}{2}(2m-1)h]}{\cos[x + (m-1)h]\cos(x + mh)} = \frac{\sin\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h}\cdot\frac{\sin(x + \frac{1}{2}nh)}{\cos x\cos(x + nh)},$$

oder, wenn $\frac{1}{2}\pi + x$ statt x gesetzt wird:

$$8.\quad \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\cos[x+\frac{1}{2}(2m-1)h]}{\sin[x+(m-1)h]\,\sin(x+mh)} = \frac{\sin\frac{1}{2}nk}{\sin\frac{1}{2}h}\cdot\frac{\cos(x+\frac{1}{2}nh)}{\sin x\,\sin(x+nh)}.$$

§. 3.

Die Function sei $\mu_m = (q \overset{k}{+} mk)_p$. Man findet hier leicht die Relation

$$\mu_m = \mu_{m-1}\cdot\frac{q+(m+p-1)k}{q+(m-1)k},\quad \text{also } \mu_{m-1}-\mu_m = \mu_{m-1}\left[1-\frac{q+(m+p-1)k}{q+(m-1)k}\right] =$$

$$-\mu_{m-1}\cdot\frac{pk}{q+(m-1)k} = -\frac{[q+(m-1)k]\ldots[q+(m+p-2)k]}{1\cdot2\cdot3\ldots p\cdot[q+(m-1)k]}\cdot pk = -(q\overset{k}{+}mk)_{p-1}\cdot k,$$

folglich

$$9.\quad \sum_{m=1}^{m=n}(q\overset{k}{+}mk)_{p-1} = \frac{(q\overset{k}{+}nk)_p - q_p}{k},$$

oder für $q-k$ statt q:

$$9^*\quad \sum_{m=1}^{m=n}[q\overset{k}{+}(m-1)k]_{p-1} = \frac{[q+(n-1)k]_p-(q-k)_p}{k},$$

oder endlich für $n+1$ statt n:

$$\sum_{m=0}^{m=n}(q\overset{k}{+}mk)_{p-1} = \frac{(q\overset{k}{+}nk)_p-(q\overset{k}{-}k)_p}{k}.$$

Für $k=-1$ ergiebt sich

$$10.\quad \sum_{m=0}^{m=n}(q-m)_p = (q+1)_{p+1}-(q-n)_{p+1} \text{ für ein ganz beliebiges } q.$$

Setzt man $q-n=p$, so erhält man die bekannte Gleichung

$$11.\quad \sum_{m=0}^{m=n}(p+m)_p = \sum_{m=0}^{m=n}(p+m)_m = (p+n+1)_{p+1} = (p+n+1)_n.$$

§. 4.

Nimmt man $\mu_m = k^{-m}\overset{k}{q}_{p+m}$, so ergiebt sich leicht $\mu_m = \mu_{m-1}\cdot\frac{q+(p+m-1)k}{(p+m)k}$,

also $\mu_{m-1}-\mu_m = \mu_{m-1}\left[1-\frac{q+(p+m-1)k}{(p+m)k}\right] = -\mu_{m-1}\cdot\frac{q-k}{(p+m)k}$

$= -\frac{(q\overset{k}{-}k)_{p+m}}{k^m}$, folglich

$$\sum_{m=0}^{m=n} k^{-m}(q\overset{k}{-}k)_{p+m} = \frac{k\,\overset{k}{q}_{p+n}-\overset{k}{q}_p}{1}.$$

Setzt man zuerst $n+1$ statt n und dann $p-1$ statt p, so kommt

$$12. \quad \sum_{m=0}^{m=n} k^{-(m+1)} \overset{k}{q}_{p+m} = k^{-(n+1)} (q \overset{k}{+} k)_{p+n} - (q \overset{k}{+} k)_{p-1}.$$

Die Annahme $k = -1$ giebt einen Satz von den Binominalcoëfficienten, nämlich

$$13. \quad \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^{m+1} q_{p+m} = (-1)^{n+1} (q-1)_{p+n} - (q-1)_{p-1},$$

welche Gleichung für $p = 1$ übergeht in:

$$14. \quad \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m q_m = (-1)^n (q-1)_n.$$

Setzt man hierin endlich $q = n$, so wird

$$14. \quad \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m n_m = 0;$$

welches ein bekanntes Theorem ist.

§. 5.

Ist das allgemeine Glied der Grundreihe $\mu_m = (-k)^m (q \overset{k}{+} mk)_{p-m}$, so findet man durch leichte Rechnungen, die ich nicht hersetzen will:

$$16. \quad \sum_{m=1}^{m=n} (-k)^{m-1} \cdot \frac{[q + (m-1)k]_{p-m}^{k}}{p-m+1} = \frac{(q \overset{k}{+} k)_p + (-1)^{n+1} k^n [q \overset{k}{+} (n+1)k]_{p-n}}{q + (p-1)k},$$

aus welcher Relation die Eigenschaft der Binominalcoëfficienten

$$17. \quad \sum_{m=0}^{m=n} \frac{(q-m+1)_{p-m}}{p-m+1} = \frac{(q+1)_p - (q-n+1)_{p-n}}{q-p+1}$$

folgt, oder für $p = n$:

$$18. \quad \frac{q_{n-1}}{n} + \frac{(q-1)_{n-2}}{n-1} + \frac{(q-2)_{n-3}}{n-2} + \text{etc.} + \frac{(q-n+1)_0}{1} = \frac{(q+1)_n - 1}{q-n+1}.$$

Setzt man endlich $q - n + 1 = r$, so ergiebt sich

$$19. \quad \frac{r_0}{1} + \frac{(r+1)_1}{2} + \frac{(r+2)_2}{3} + \text{etc.} + \frac{(r+n-1)_{n-1}}{n} = \frac{(r+n)_n - 1}{r}.$$

§. 6.

Die reciproken Werthe der in den §§. 3., 4., 5. behandelten Functionen geben eine ähnliche Rechnung. Da die Transformationen keine Schwierigkeiten haben, so setze ich bloss die Resultate her.

I. Die Function $\mu_m = \dfrac{1}{(q \overset{k}{+} mk)_p}$ giebt

$$20.\quad \sum_{m=0}^{m=n} \frac{1}{\overset{k}{(q+mk)}_p} = \frac{p}{(p-1)k}\left[\frac{1}{\overset{k}{q}_{p-1}} - \frac{1}{\overset{k}{[q+(n+1)k]}_{p-1}}\right].$$

Setzt man $k=-1$ und $q-n=p$, so erhält man

$$21.\quad \sum_{m=0}^{m=n} \frac{1}{(p+m)_p} = \frac{p}{p-1}\left[1 - \frac{1}{(n+p)_{p-1}}\right].$$

Setzt man dagegen $k=1$ und bezeichnet allgemein die $q$te figurirte Zahl der $p$ten Ordnung durch $\overset{q}{f}_p$, so entsteht der Ausdruck

$$22.\quad \sum_{m=q}^{m=q+n} \frac{1}{\overset{m}{f}_p} = \frac{p}{p-1}\left[\frac{1}{\overset{q}{f}_{p-1}} - \frac{1}{\overset{q+n+1}{f}_{p-1}}\right],$$

oder, für $q=1$,

$$23.\quad \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{\overset{m}{f}_p} = \frac{p}{p-1}\left[1 - \frac{1}{\overset{n+1}{f}_{p-1}}\right].$$

So findet man die Summe der reciproken Werthe der figurirten Zahlen einer beliebigen Ordnung.

II. Die Function $\frac{k}{\overset{k}{}}$ giebt

$$24.\quad \sum_{m=1}^{m=n} k^{m-1}\cdot\frac{1}{(q+m)\overset{k}{q}_{p+m}} = \frac{1}{q-k}\left(\frac{1}{\overset{k}{q}^p} - \frac{k^n}{\overset{k}{q}_{p+n}}\right).$$

III. Endlich entspringt aus der Annahme $\mu_m = \frac{1}{(-n)^m (q+mk)_{p-m}}$

$$25.\quad \sum_{m=1}^{m=n} \frac{(-1)^{m-1}}{k^m}\cdot\frac{1}{[q+(m-1)k]\,\overset{k}{(q+mk)}_{p-m}} = \frac{1}{q+pk}\left[\frac{1}{\overset{k}{q}_p} + (-1)^{n+1}\frac{1}{k^n \overset{k}{(q+nk)}_{p-n}}\right],$$

welche Relation für $k=-1$ und $p=n$ übergeht in:

$$26.\quad \frac{1}{(q-n+1)(q-n)_0} + \frac{1}{(q-n)(q-n-1)_1} + \frac{1}{(q-n-1)(q-n-2)_2} + \ldots + \frac{1}{q(q-1)_{n-1}}$$
$$= \frac{1}{q-p}\left(1 - \frac{1}{q_p}\right).$$

§. 7.

Zwei auf einander folgende Glieder der Grundreihe seien kn_m und λn_{m+1}, wo die Coëfficienten k und λ vorläufig noch unbestimmt sind. Da $n_{m+1} = n_m\cdot\frac{n-m}{m+1}$, so ist $kn_m - \lambda n_{m+1} = n_m\left(k - \lambda\cdot\frac{n-m}{m+1}\right) = \frac{n_m}{m+1}[(k+\lambda)m + k - n\lambda]$. Setzt man nun $k - n\lambda = 0$, also $k+\lambda = (n+1)\lambda$, so wird $kn_m - \lambda n_{m+1}$

$= \frac{n_m}{m+1}(n+1)\lambda m = m\lambda(n+1)_{m+1}$, oder, für $\lambda = 1$: $k n_m - \lambda n_{m+1}$
$= m(n+1)_{m+1}$, d. h. $n.n_m - n_{m+1} = m(n+1)_{m+1}$.

Die gegebene Reihe ist also

$$n.n_0,\quad n_1,\quad \frac{1}{n}.n_2,\quad \frac{1}{n^2}.n_3,\quad \dots\quad \frac{1}{n^p}\,n_{p+1}.$$

Da nun $\mu_0 - \mu_p = n - n^{-p} n_{p+1}$ ist, so findet sich

$$\frac{(n+1)_2}{n} + \frac{2(n+1)_3}{n^2} + \frac{3(n+1)_4}{n^3} + \dots + \frac{p(n+1)_{p+1}}{n^p} = n - n^{-p} n_{p+1},$$

folglich, wenn man mit $n+1$ dividirt:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{1\cdot 2} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 4} + \dots + \frac{(n-1)\dots(n-p+1)}{1\cdot 2\dots(p-1)(p+1)}\cdot\frac{1}{n^{p-1}} = \frac{n - \frac{n_{p+1}}{n^p}}{n+1},$$

oder

$$27.\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}(n-1)_1 + \frac{1}{4n^2}(n-1)_2 + \dots + \frac{1}{(p+1)n^{p-1}}(n-1)_{p-1} = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{n_{p+1}}{n^{p+1}}\right).$$

Dafür kann man auch setzen

$$28.\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{1..(p-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{p-1}{n}\right)$$
$$= \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{n_{p+1}}{n^{p+1}}\right),$$

folglich für $n = \infty$

$$29.\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{1\dots(p-1)} = 1 - \frac{1}{1\dots(p+1)}.$$

Stralsund, den 16. Februar 1845.

21.

Nova methodus determinandi multitudinem radicum congruentiae $x^t \equiv 1 \pmod{M}$ aliaque ad hanc materiam spectantia.

(*Auctore Friderico Arndt, Sundiae.*)

In opere egregio, quod inscribitur „*Disquisitiones Arithmeticae,*" *Ill. Gauss* demonstravit, congruentiam $x^t \equiv 1 \pmod{p^n}$, denotante p numerum primum imparem, tot radices diversas admittere, quod unitatis sint divisori comm. maximo numerorum t, $p^{n-1}(p-1)$. Ipsam autem demonstrationem, licet ingeniosissima sit, operorosiorem tamen esse, nemo non concedit, qua de causa simpliciorem, ad modulum quoque 2^n pertinentem, afferre constitui.

Nostra haec demonstratio nititur multitudine numerorum, ad eundem exponentem pertinentium, quae quidem alio modo, ut in Disq. Arith., indaganda erit, quoniam methodus ab *Gaussio* adoptata ex eo pendet, quod congruentia $x^t \equiv 1 \pmod{p^n}$ non plures quam t radices diversas habeat, quod ipsum nobis demonstrandum proposuimus.

Omnia, quae allaturus sum, eo recurrunt, ut semper radicem primitivam moduli p^n exstare probetur, quod quidem pro modulo p ab *Gaussio* adjumento propositionis demonstratum est, congruentiam $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ non plures quam t radices admittere diversas. Hoc ipsum autem facillime verificatur. Radicem primitivam moduli p^2 exstare, propositionemque, quamcunque moduli p^2 radicem primitivam etiam cujusvis altioris potestatis ipsius p radicem primitivam esse, in §§. 5. et 6. novis methodis argumentatus sum.

I. De modulo p^n vel $2p^n$, denotante p numerum primum imparem.

§. 1.

Theorema.

Si differentia $a^t - 1$ *per potestatem* n*tam numeri* p, *nec per altiorem ipsius* p *potestatem divisibilis est*, p^{n+1} *erit summa numeri* p *potestas differentiam* $a^{tp} - 1$ *metiens.*

Demonstratio.

Ex supp. a^t formam habet $1 + hp^n$, ita ut h factorem p non involvat, qua re est ex theorem. binom. $a^{tp} - 1 = p_1 . hp^n + p_2 . h^2 p^{2n} + p_3 . h^3 p^{3n} +$ etc., at quisque coeff. binom. per p divisibilis est, ergo habetur

$$a^{tp} - 1 = hp^{n+1} + \frac{p-1}{2} h^2 p^{2n+1} + \frac{(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3} h^3 p^{3n+1} + \text{etc.},$$

omnesque coeff. sunt integri. Ex qua aequatione patet, differentiam $a^{tp} - 1$ per p^{n+1}, neque vero per p^{n+2}, multoque minus per altiorem quam $(n+2)$tam potestatem divisibilem esse.

§. 2.

Theorema.

Vice versa, si p^n *est summa potestas differentiam* $a^{tp} - 1$ *metiens, differentia* $a^t - 1$ *per* p^{n-1}, *nec per altiorem ipsius* p *potestatem, divisibilis erit.*

Demonstratio.

Primum perspicuum est, $a^t - 1$ per p divisibilem esse. Esto enim $a^t \equiv \alpha$ (mod. p), ubi $\alpha < p$, eritque $a^{tp} \equiv 1$; at ex theorem. Fermat. $\alpha^p \equiv \alpha$, ergo $\alpha \equiv 1$ (mod. p), unde $\alpha = 1$, i. e. $a^t - 1$ per p divisibilis.

Quodsi $a^t - 1$ ad summum per p^λ divisibilis est, $p^{\lambda+1}$ erit summa potestas differentiam $a^{tp} - 1$ metiens (§. 1.), unde ex supp. $\lambda + 1 = n$, vel $\lambda = n - 1$, ideoque $a^t - 1$ ad summum per p^{n-1} divisibilis est.

§. 3.

Theorema.

Quando g *ad exponentem* $p - 1$ *pertinet sec. mod.* p (*quo facto* g *radix primitiva mod.* p), *ad unum horum pertinere debet*:

$$p-1, \quad (p-1)p, \quad (p-1)p^2, \ldots (p-1)p^{n-1}$$

sec. mod. p^n.

Si enim g^{p-1} *per* p^n *divisibilis est*, g *ad exponentem* $p-1$ *pertinet sec.* p^n; nam si ad minorem τ pertineret, esset etiam $g^\tau \equiv 1$ (mod. p), unde g non ad t pertineret sec. mod. p.

Si vero $g^{p-1}-1$ *per* p^μ *non divisibilis est, sed ad summum per* p^λ, *ubi* $\lambda < \mu$, g *ad exponentem* $(p-1)p^{\mu-\lambda}$ *pertinet sec.* p^n. Nam si ad minorem τ pertineret, hic τ, utpote divisor exponentis $(p-1)p^{\mu-\lambda}$ ac multiplum ipsius $p-1$ formae esset $(p-1)p^k$, ubi $k<n-\lambda$. Quoniam autem $a^{(p-1)p^k}-1$ per p^n divisibilis est, erit (§. 2.) $a^{p-1}-1$ divisibilis per p^{n-k}, ubi $n-k>\lambda$, ergo p^λ non esset summa potestas differentiam $a^{p-1}-1$ metiens.

§. 4.

Theorema.

Vice versa, si g *ad exponentem* $(p-1)p^{n-\lambda}$ *pertinet sec. mod.* p^n, *ad* $p-1$ *pertinere debet sec.* p, *eritque* $a^{p-1}-1$ *ad summum per* p^λ *divisibilis.*

Quum sit $g^{(p-1)p^{n-\lambda}} \equiv$ (mod. p^n), erit (§. 2.) $a^{p-1}-1$ divisibilis per p^λ. Quodsi per altiorem potestatem $p^{\lambda+1}$ divisibilis esset, differentiam $a^{(p-1)}p^{n-\lambda-1}$ metiretur p^n (§. 1.), quo facto g non ad exponentem $(p-1)p^{n-\lambda}$ sec. p^n pertineret.

Tum g ad $p-1$ pertinet sec. p; nam si ad minorem τ pertineret, ex §. 1. $g^{\tau p^{k-\lambda}}-1$ divisibilis esset per p^n, quo facto etiamnum g ad exponentem $(p-1)p^{n-\lambda}$ sec. p^n non pertineret.

§. 5.

Methodus inveniendae rad. primit. mod. p^2.

Sit g radix primitiva mod. p. Quodsi $g^{p-1}-1$ per p^2 *non* divisibilis est, ex §. 3. g ad exponentem $(p-1)p$ pertinet sec, mod. p^2, unde hujus moduli radix primitiva est.

Si vero $g^{p-1}-1$ per p^2 divisibilis est, contendo numerum $g+hp$ radicem primitivam esse mod. p^2, ubi h designat numerum per p non divisibilem.

Est enim

$$(g+hp)^{p-1}-1 = g^{p-1}-1+(p-1)_1 g^{p-2}hp+(p-1)_2 g^{p-3}h^2p^2+\text{etc.}$$

Jam vero omnes termini summae dextra parte positae secundum sequentes, nec non ipse primus, per p^2 divisibilis sunt, secundus vero terminus per p^2 non divisibilis, ergo etiam $(g+hp)^{p-1}-1$ per p^2 non divisibilis est, ideoque, quum $g+hp$ sit rad. primit. mod. p, ex §. 3. $g+hp$ ad exponentem $(p-1)p$ pertinet sec. p^2, unde hujus moduli radix primitiva.

Ill. Jacobi in opere, quod inscribitur „*Canon Arithmeticus*" (Introd. p. XXXIV.) adnotavit se dedisse in Diario Crelliano vol. I. p. 301 *omnes* congruentiae $x^{p-1} \equiv 1$ (mod. p^2) radices pro singulis ipsius p valoribus inde *ab* 3 usque ad 37 eoque modo radices primitivas minimas moduli p^2 invenisse, nempe

$$\begin{array}{lcccccccccc} & 2, & 2, & 3, & 2, & 2, & 3, & 2, & 5, & 2, & 3 \\ \text{pro } p = & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31. \end{array}$$

Tali autem molestia ex nostra methodo non opus est.

Ceterum, si scire velis, utrum potestas g^{p-1} unitati congrua fiat sec. mod. p^2, residuum modo potestatis $g^{\frac{1}{2}(p-1)}$ sec. p^2 quaerendum erit, quod si est -1, habebitur $g^{p-1} = 1$ (mod. p^2).

Exempl. 1. Pro modulo 13 est 2 radix primitiva; residua potestatum ipsius 2 sec. $13^2 = 169$, usque ad $2^{\frac{1}{2}(p-1)}$ sunt haec: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ex quo 2 radix primit. mod. 169.

Exempl. 2. Pro modulo 5 est 7 radix primitiva; residua potestatum ipsius 7 sec. $5^2 = 25$ sunt 7.24, unde $7 + 5h$, quae forma numeros involvit 12, 17, 22, radix primit. mod. 25.

§. 6.

Radix primitiva quaecunque moduli p^2 *est radix primitiva cujusvis altioris ipsius* p *potestatis.*

Nam quum $g^{p-1} - 1$ per p^2 non divisibilis sit, ex §. 3. g ad exponentem $(p-1)p^{n-1}$ pertinet sec. mod. p^n, unde hujus moduli radix primitiva est.

Alias duas demonstrationes *Ill. Jacobi* vid. in *Can. Arithm.* Introd. p. XXXV.—XXXVII.

§. 7.

Vica versa quaecunque radix primitiva moduli p^n, *ubi* $\mathrm{n} > 2$, *est radix primitiva moduli* p^2. (§. 4.)

§. 8.

Ex antecedentibus patet, moduli p^2 semper exstare radicem primitivam. Quod quidem etiam pro modulo $2p^n$ valere, ita patet:

Posito $x \equiv 1$ (mod. 2), simulque $x \equiv g$ (mod. p^n), denotante g radicem primitivam moduli p^n, erit $x^{(p-1)p^{n-1}} \equiv 1$ (mod. p^n) atque $\equiv 1$ (mod. 2), unde $x^{(p-1)p^{n-1}} \equiv 1$ (mod. $2p^n$). Quodsi x pertineret ad exponentem τ sec. $2p^n$, ubi $\tau < (p-1)p^{n-1}$, esset $x^\tau \equiv 1$ (mod. p^n), neque pertineret x ad exponentem $(p-1)p^{n-1}$ sec. p^n, contra supp., ergo x est radix primit. mod. $2p^n$.

Quaeque igitur radix primitiva impar mod. p^n *est radix primitiva mod.* $2p^n$.

§. 9.

Quoniam pro modulo p^n vel $2p^n$ radicis primitivae g periodus

$$g,\ g^2,\ g^3 \ldots g^{(p-1)p^n}$$

omnes numerus ad modulum primos eoque minores complectitur, numerus quicunque a ad exponentem t pertinens, qui est divisor numeri $(p-1)p^{n-1}$, potestati alicui ipsius g congruus fiet. Cujus potestatis exponens (Index numeri a) facile determinatur adjumento prop. sequentis:

Denotante g *radicem primitivam moduli* p^n *vel* $2p^n$, *atque* α *numerum ad* t *primum, potestas*

$$g^{\frac{\alpha(p-1)p^{n-1}}{t}}$$

vel ejus residuum minimum ad exponentem t *pertinebit sec. mod. prop.*

Demonstratio.

Posito brev. gratia $(p-1)p^{n-1} = v$, est $g^v \equiv 1$, ergo $\left(g^{\alpha \cdot \frac{v}{t}}\right)^t \equiv 1$ (mod. p^n vel $2p^n$). Quodsi protestas nostra ad minorem exp. r pertineret, esset r multiplum ipsius r, vel $t = rt'$, unde $\left(g^{\frac{\alpha v}{t}}\right)^r = g^{\frac{\alpha v}{t'}} \equiv 1$. Metiretur igitur v numerum $\frac{\alpha v}{t'}$, ergo esset $\frac{\alpha}{t'}$ integer quo facto α et t non essent primi inter se. Ergo $g^{\frac{\alpha v}{t}}$ ad exponentem t revera pertinet.

Est igitur Ind $a = \frac{\alpha v}{t}$; hoc modo tabula indicum numerus ad exp. t pertinens facillime invenitur.

§. 10.

Vice versa quicunque numerus a *ad exponentem* t *pertinens sec mod.* p^n *vel* $2p^n$, *potestati* $g^{\frac{\alpha v}{t}}$ *congruus fieri debet; ita ut* α *ad* t *sit primus.*

Quum a potestati alicui ipsius g congruus fieri debeat, ponatur $g^\beta \equiv a$, unde $g^{\beta t} \equiv 1$, quare βt multiplum ipsius v. Atqui t metitur v, vel est $v = tt'$, ergo $\frac{\beta t}{tt'}$ i. e. $\frac{\beta}{t'}$ numerus integer α, vel $\beta = \alpha t' = \frac{\alpha v}{t}$. Sed α ad t primus est; nam si α et t divisorem comm. maximam ϑ haberent, esset $\beta = \frac{\alpha}{\vartheta}$ v: $\frac{t}{\vartheta}$, pertineretque (§. 9.) a ad exponentem $\frac{t}{\vartheta}$, contra supp.

§. 11.

Corollarium.

Ex §§. 9., 10. sequitur, ad exponentem t sec. mod. p^n vel $2p^n$ tot numeros pertinere, quot sint ad t primi eoque inferiores vel φt.

§ 12.

Quum ex §. 9. potestas $g^{\frac{v}{t}}$ ad exponentem t pertineat, sequitur. potestatem a^k ad eundem exponentem pertinere, ad quem a, denotante k numerum ad hunc exponentem primum.

Itaque omnes numeri ad exponentem t pertinentes sec. mod. p^n vel $2p^n$, residuis potestatum exhibentur

$$a^{k_1},\quad a^{k_2},\quad a^{k_3},\ \ldots\ a^{k_{\varphi t}},$$

ubi sunt $k_1, k_2, k_3, \ldots k_{\varphi t}$ omnes numeri ad t primi eoque inferiores, atque a numerus quicunque ad t pertinens.

§. 13.

Si quaeritur exponens, ad quem num. prop. a sec. p^n vel $2p^n$ pertineat, ita oportet concludi:

Est $a^t\equiv 1$ (mod. p^n vel $2p^n$), ergo $t\,\mathrm{Ind}\,a\equiv 0$ (mod. v), vel $\frac{t\,\mathrm{Ind}\,a}{v}$ numerus integer. Quodsi est ϑ divisor comm. maximus numerorum v, Ind a, erit $\frac{t\,\mathrm{Ind}\,a}{v} : \frac{v}{\vartheta}$ integer, ideoque $t:\frac{v}{\vartheta}$ integer, utique fiat t minimus : $t=\frac{v}{\vartheta}$.

Invenitur igitur exponens, ad quem a *pertinet, si numerus* $v=(p-1)p^{n-1}$ *dividatur per divisorem communem maximum numerorum Ind* a, v.

II, De modulo 2^n, ubi $n>2$.

Theoriam moduli 2^n egregie jam exposuerunt *Gauss* in *Disq. Arithm.* (Sect. I. p. 88., 89.) et *Jacobi* in *Can. Arithm.* (Introd. p. XXXVII. sqq.), quare hanc materiam breviter modo perstringam.

Notum est, quemcunque numerum imparem a ad exponentem pertinere sec. mod. 2^n, qui est potestas numeri 2 ipso 2^{n-2} non major; scilicet numerus a ad formam redactus $2^m h\pm 1$, ita ut sit $m\geqq 2$ atque h impar, semper ad exponentem 2^{n-m} pertinet, excepto casu, in quo $a=2^n-1$, qui numerus ad exponentem 2 pertinet.

Omnes igitur numeri ad exponentem 2^{n-m} pertinentes ex forma petuntur $2^m h \pm 1$, vel ex hac $2^m \pm 1 + 2^{m+1} k$, ubi h impar, ipso $2^{n-m} - 1$ non major, k numerus quicunque situs inter 0 et $2^{n-m-1} - 1$, ipsis limitibus inclusis.

Itaque ad exponentem $t = 2^{n-m}$ *totidem numeri pertinent, excepto casu, in quo* $t = 2$; *numeri enim ad* $t = 2$ *pertinentes sunt tres, nempe* $2^{n-1} - 1$, $2^{n-1} + 1$ et $2^n - 1$. *Horum numerorum dimidia pars formas involvit* $4h + 1$, *reliqui sunt formae* $4h - 1$.

§. 14.

Numeri ad exponentem $t = 2^{n-m}$ pertinentes sec. mod. 2^n, *duabus* periodis exhibentur. Etenim simili modo, ut §. 12., probatur, potestatum residua

$$a;\; a^3,\; a^5,\; a^7,\; \ldots\; a^{t-1},$$

quorum multitudo $\frac{1}{2}t$, ad eundem exponentem pertinere, ad quem a pertineat. Quodsi a formae est $2^m h + 1$, ejusdem formae erunt residua, quae dixi.

Jam sit b numerus ad t pertinens formae alterius $2^m h - 1$, involvetque periodus

$$b,\; b^3,\; b^5,\; b^7,\; \ldots\; b^{t-1},$$

denuo $\frac{1}{2}t$ numeros formae $2^m h - 1$ ad eundem exponentem t pertinentes.

Quum jam multitudo numerorum ad t pertinentium sit t (casum $t = 2$ excludimus); hoc ipsos ambae illae periodi exhauriunt.

III. Solutio congruentiae
$x^t \equiv 1$ (mod. M)
ubi $M = p^n$ vel $2p^n$ vel 2^n ($n > 2$).

(A) Sit modulus p^n vel $2p^n$.

Radix quaecunque x congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. p^n vel $2p^n$) ad exponentem pertinere debet, qui numeros t, $(p-1)p^{n-1}$ simul metiatur, unde hic exponens divisorem communem maximum numerorum t, $(p-1)p^{n-1}$, quem per δ designemus, metietur.

Quodsi omnes divisores ipsius δ, unitude et δ non exclusis, sunt hi

$$\tau,\; \tau',\; \tau'',\; \tau''',\; \text{etc.}$$

omnes congruentiae propositae radices partim pertinebant ad exponentem τ,

partim ad τ', partim ad τ'', etc. Ad exponentem τ autem pertinent $\varphi\tau$ numeri, ad τ' pertinent $\varphi\tau'$ numeri, etc., ergo multitudo radicum est

$$\varphi\tau + \varphi\tau' + \varphi\tau'' + \varphi\tau''' + \text{etc.}$$

i. e. δ sec. theorema satis notum, cujus nuperrime in hoc Diario demonstrationem dedi.

Ex praecedentibus patet, omnes congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. p^n vel $2p^n$) radices methodo certa inveniri posse, si modo radix primitiva moduli p cognita sit.

Ceterum ex congruentia $x^t \equiv 1$ (mod. p^n vel $2p^n$) est t Ind. $x \equiv 0$ [mod. $(p-1)p^{n-1}$]. Quando igitur δ divisor comm. maximus numerorum $t, (p-1)p^{n-1}$, habetur

$$\text{Ind.}\, x = \frac{(p-1)p^{n-1}}{\delta}, \qquad 2.\frac{(p-1)p^{n-1}}{\delta}, \qquad 3.\frac{(p-1)p^{n-1}}{\delta}, \text{ etc.}, \quad \delta.\frac{(p-1)p^{n-1}}{\delta}.$$

Exempl. Pro $x^{30} \equiv 1$ (mod. 125) habetur $\delta = 10$, $(p-1)p^{n-1} = 100$, ergo

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{Ind.}\, x = & 10, & 20, & 30, & 40, & 50, & 60, & 70, & 80, & 90, & 100, \\ x = & 24, & 76, & 74, & 26, & 124, & 101, & 49, & 51, & 99, & 1, \end{array}$$

vid. Tabulas Can. Arithm. p. 224.

Ad inveniendum numerum, qui ad exponentem t pertineat, sufficit ipsum t in factores primos $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ etc. resolvere, atque numeros quaerere ad exponentes A^α, B^β, C^γ, etc. pertinentes.

Denotante enim a numerum ad A^α, b numerum ad B^β, c num. ad C^γ pertinentem etc., notum est, productum abc etc. ad exponentem $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ etc. pertinere.

Numerus ad exponentem A^α pertinens inveniri potest hac propositione, quam verum esse facile perspicitur:

Quando a *ad exponentem* A *pertinet, numerus* x, *congruentia determinatus*

$$x^{A^{\alpha-1}} \equiv a \text{ (mod. } p^n \text{ vel } 2p^n),$$

ad exponentem A^α *pertinet.*

Hic x reperitur congruentia primi gradus $A^{\alpha-1}$ Ind. $x \equiv$ Ind a [mod. $p^{n-1}(p-1)$].

(B) Sit modulus 2^n, ubi $n > 2$.

Radix quaecunque ω congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. 2^n) ad exponentem pertinere debet, qui numeros t, 2^{n-2} simul metiatur, unde hic exponens divisorem comm. maximum numerorum t, 2^{n-2}, quem per 2^δ designemus, metietur.

Omnes igitur congruentiae prop. radices ad exponentes

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \dots 2^\delta$$

pertinebant.

In universum autem ad exponentem 2^ϑ, ubi ϑ ab 1 diversus, 2^ϑ numeri pertinent, ad exponentem 2 tres numeri (§. id. II.), ergo multitudo omnium radicum est

$$1 + 3 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^\delta = 2^{\delta+1},$$

quare multitudo radicum congruentiae $x^t \equiv 1$ *(mod.* 2^n*) est alterum tantum divisore comm. max. numerorum* t, 2^{n-2}.

Excipiendus est casus, in quo t *impar; tum enim una solummodo radix exstat* 1.

Quoniam ad exponentem 2^ϑ pertinet numerus $2^{n-\vartheta} \mp 1 + 2^{n-\vartheta+1}k$ ubi k crescat inde ab 0 usque ad $2^{\vartheta-1}-1$, haec methodum habemus radices inveniendi:

Denotante 2^δ *divisorem maximum numerorum* t, 2^{n-2}, *determinentur omnes valores numeri*

$$2^{n-\vartheta} \mp 1 + 2^{n-\vartheta+1}k$$

inde ab $\vartheta = 2$ *usque ad* $\vartheta = \delta$, *et pro quoque valore ponantur pro* k *omnes integri inde ab* 0 *usque ad* $2^{\vartheta-1} - 1$. *Reliquae radices erunt* 1, $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}+1$, 2^n-1.

Exempl. Sit $t = 24$, $n = 5$; erit $\delta = 3$.

Valores numeri $2^{n-\vartheta} \mp 1 + 2^{n-\vartheta+1}k$ sunt pro $\begin{cases} \vartheta = 2 \text{ hi } 8\mp1,\ 8\mp1+16, \\ \vartheta = 3 \text{ hi } 4\mp1,\ 4\mp1+8,\ 4\mp1+16,\ 4\mp1+24, \end{cases}$

unde omnes radices congruentiae

$$x^{24} \equiv 1 \text{ (mod. } 2^5)$$

sunt hae: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.

IV.

Omnes radices congruentiae

$$x^t \equiv 1 \text{ (mod. } p^n \text{ vel } 2p^n)$$

una periodo radicis cujusdam exhibentur.

Denotante enim ω radicem ad exponentem δ pertinentem, ubi δ divisor communis maximus numerorum t, $p^{n-1}(p-1)$, residua potestatum

$$g,\ g^2,\ g^3,\ g^4, \dots g^\delta$$

erunt radices congruentiae propositae diversae.

Radices vero congruentiae

$$x^t \equiv 1 \text{ (mod. } 2^n)$$

duabus periodis exhibentur.

Denotante enim ω radicem ad exponentem 2^δ pertinentem, ubi 2^δ divisor communis maximus numerorum t, 2^{n-2}, residua potestatum

$$\omega, \ \omega^2, \ \omega^3, \dots \omega^{2^\delta}$$

erunt radices congruentiae prop. diversae

Altera pars radicum est

$$-\omega, \ -\omega^2, \ -\omega^3, \dots -\omega^{2^\delta}.$$

Nullum enim terminum secundae seriei alicui primae congruum fore ita patet:

Si esset $\omega^\lambda \equiv -\omega^\mu$, atque $\lambda > \mu$, haberetur $\omega^\lambda + \omega^\mu \equiv 0$, vel $\omega^\mu(\omega^{\lambda-\mu}+1) \equiv 0 \text{ (mod. } 2^n)$, ideoque $\omega^{\lambda-\mu} \equiv -1 \text{ (mod. } 2^n)$, $\omega^{2(\lambda-\mu)} \equiv 1$. Ex quo $2(\lambda-\mu)$ multiplum ipsius 2^δ, $\lambda-\mu$ multiplum ipsius $2^{\delta-1}$; atqui $\lambda-\mu < 2^\delta$, ergo $\lambda-\mu = 2^{\delta-1}$. Jam vero potestas $\omega^{2^{\delta-1}}$ formam habet $2^m h + 1$, qua re esset $2^m h + 1 \equiv -1$, vel $2^m h + 2 \equiv 0 \text{ (mod. } 2^n)$, $2^{m-1} h + 1 \equiv 0 \text{ (mod } 2^{n-1})$, q. e. d. Quando $\lambda < \mu$, demonstratio eadem est. Si denique $\omega^\lambda \equiv -\omega^\lambda$, est $2\omega^\lambda \equiv 0 \text{ (mod. } 2^n)$, $\omega^\lambda \equiv 0 \text{ (mod. } 2^{n-1})$, q. e. d. Ergo duobus illis periodis revera radices omnes exhibentur.

Exempl. Pro $x^{20} \equiv 1 \text{ (mod. } 32)$ est $\delta - 2$. Ad exponentem 2^δ pertinet 7, unde radices sunt

7.	17.	23.	1
25.	15.	9.	31.

Scribebam Sundiae 27. M. Apr. 1845.

Crelle Journal d. Math. Bd. XXXI. Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von W. Herschel.

. . . . From what I have now mentioned Sir, you will find that I am still in expectation of directions how to proceed. When the Telescope arrives, the Academy wil perceive that I have changed the object mirror whi h only 12 inches in diameter for a much larger o have also increased the size of the tube in propor. I hope the Academy of Sciences will look upon my sen. a much more complete and powerful telescope than the ne I had engaged to make as a testimony of the high respect I entertain for the Institution of which I have the honour to be allowed to call myself a member; and give me leave to add Sir, that I remain with the most perfect regard

your most humble and
most obedient Servant

Wm Herschel

Slough
near Windsor
August 3, 1804

22.

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der höhern Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist.

(Von Herrn Oberlehrer *Schönemann* am Gymnasio zu Brandenburg a. d. H.)

V o r w o r t.

Der erste Theil der folgenden Abhandlung erschien zuerst in dem Programm des Brandenburgischen Gymnasiums von Ostern 1844. Bis auf wenige Veränderungen ist er hier wörtlich abgedruckt. Dem Vorworte jener Abhandlung erlaube ich mir das Folgende zu entnehmen:

„Die Veranlassung zur folgenden Untersuchung fand ich schon vor längerer Zeit in dem Auffinden des Satzes: dass die Gleichung für die $p$ten Potenzen der Wurzeln einer Gleichung, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind, mit der ursprünglichen Gleichung in ihren entsprechenden Coëfficienten nach dem Modul p congruent sei, wenn p eine Primzahl ist. Obschon dieser Satz nach einer Seite hin eine bedeutende Verallgemeinerung des bekannten *Fermat*'schen Satzes ist, so erkannte ich doch bald, dass er in dieser Gestalt unvollendet sei. Er lässt sich nämlich nur als eine Verallgemeinerung des Satzes ansehen, dass $a^p \equiv a (\text{mod.} p)$ sei, wenn a irgend eine Zahl und p eine Primzahl bedeutet, nicht aber als eine Verallgemeinerung des Satzes, dass $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod.} p)$ sei, wenn a eine Zahl bedeutet, die nicht $0 \equiv (\text{mod.} p)$ ist. Da der *Fermat*'sche Satz nun aber vorzüglich nur in der letzten Form fruchtbar ist, so bemühte ich mich, jenen allgemeinen Satz auf eine ähnliche Form zurückzuführen. Dies erreichte ich zwar bald, aber bloss von einigen Einzelnheiten geleitet. Der Beweis für die Allgemeinheit des Satzes schien mir bei dem Wenigen, was wir von der Form der Wurzeln einer Gleichung wissen, mit sehr grossen Schwierigkeiten verbunden. Hierzu kam, dass Proberech-

nungen wegen zu grosser Weitläuftigkeit fast unmöglich wurden. Ich versuchte daher neuerdings, sobald es meine Zeit gestattete, auf rein speculativem Wege, wenn es möglich wäre, den Beweis zu finden. Dies ist mir auf eine mich überraschend einfache Weise gelungen. Es haben sich aber hierbei so äusserst wichtige Sätze und Aufschlüsse über die Lehre der Congruenzen ergeben, dass ich in denselben die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Congruenzen höherer Grade, deren Modul eine reelle Primzahl ist, erblicke. Der Hauptsatz steht mit dem *Fermat*'schen Satze auf der einen Seite und mit der *Gauss*'schen Methode der Kreistheilung auf der andern Seite in dem engsten Zusammenhange. Aus demselben geht zugleich hervor, dass sich alle Congruenzen gewissermassen auf reine reduciren lassen.

Der berühmte Verfasser der *Disquisitiones Arithmeticae* hatte für den achten Abschnitt seines Werks eine allgemeine Theorie der höhern Congruenzen bestimmt. Da indessen dieser achte Abschnitt nicht erschienen, und auch, so viel ich weiss, über diesen Gegenstand sonst nichts von dem Herrn Verfasser bekannt gemacht oder nur bestimmt angedeutet worden ist (denn die Untersuchungen über imaginäre Moduln gehören in ein anderes Gebiet), so wage ich nicht, zu entscheiden, ob und wie weit die vorliegende Arbeit mit den Untersuchungen des berühmten Meisters in Berührung stehe. Sollte ich vielleicht zum Theil denselben Sätzen meine Forschung gewidmet haben, wie der tiefsinnige Begründer der Lehre von den Congruenzen, so würde mich über die Einbusse der ersten Entdeckung das Bewusstsein schadlos halten, auf selbstständigem Wege mit dem Streben eines solchen Geistes zusammengetroffen zu sein."

Brandenburg a. d. H., den 16. Februar 1845.

Schönemann.

Einleitung.

§. 1.

Zu den einfachsten Gattungen symmetrischer Functionen gegebener Grössen gehören diejenigen, welche aus einzelnen Producten *gleich hoher* Potenzen jener Grössen zusammengesetzt sind. Ist die Anzahl der gegebenen

Grössen n, und enthält jedes einzelne Product m solcher Grössen in der Potenz z, so bildet man die betreffende symmetrische Function, indem man die gegebenen n Grössen zu je m combinirt, jede der erhaltenen Complexionen in die $z$te Potenz erhebt und dann Alles addirt. Symmetrische Functionen dieser Gattung sollen *einfache* heissen und durch Klammern bezeichnet werden, in welchen der Exponent m mal geschrieben steht. Sind also α, β, γ und δ die gegebenen n Grössen, so würde $\alpha^3\beta^3 + \alpha^3\gamma^3 + \alpha^3\delta^3 + \beta^3\gamma^3 + \beta^3\delta^3 + \gamma^3\delta^3$ eine einfache symmetrische Function sein und durch [3,3] bezeichnet werden.

Es ist nun gezeigt worden (S. meine Abhandlung über symmetrische Functionen etc. im 19. Bande dieses Journals, Seite 233—295.):

1) Dass sich jede symmetrische ganze Function von n Grössen als eine ganze, in ganzen Zahlen ausgedrückte Function gewisser einfacher Functionen dieser n Grössen darstellen lasse;
2) Dass alle symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung ganze rationale und in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen der Coëfficienten dieser Gleichung sind; und dass daher
3) Alle symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind, selbst ganze Zahlen sein müssen.

§. 2.

Lehrsatz. Die symmetrischen Functionen sämmtlicher Wurzeln einer Gleichung, ausser einer, lassen sich als ganze, in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen jener einen und der Coëfficienten der Gleichung darstellen.

Beweis. Es seien $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a^n = 0$ die Gleichung und α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln derselben, so ist nach der obigen Bezeichnung, wenn man diese Wurzeln selbst als Elemente von symmetrischen Functionen ansieht, $[1] = -a_1$, $[11] = a_2$, $[111] = -a_3$ etc. Setzt man nun $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ als Elemente von symmetrischen Functionen, so mögen diese zum Unterschiede von jenen durch einen hinzugefügten Index bezeichnet werden, so dass also $[1]_1 = \alpha_2 + \alpha_n + \ldots + \alpha_n$; $[11]_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$ etc. ist. Offenbar ist nun $[1] = \alpha_1 + [1]_1$, $[11] = \alpha_1[1]_1 + [11]_1$, $[111] = \alpha_1 [11]_1 + [111]_1$, $[1111] = \alpha_1 [111]_1 + [1111]_1$ etc. Hieraus folgt $-a_1 = \alpha_1 + [1]_1$, $+a_2 = \alpha_1 [1]_1 + [11]_1$, $-a_3 = \alpha_1 [11]_1 + [111]_1$, $a_4 = \alpha_1 [111]_1 + [1111]_1$ etc. und hieraus $[1]_1 = -(a_1 + \alpha_1)$, $[11]_1 = a_2 + a_1\alpha_1 + \alpha_1^2$, $[111] = -(a_3 + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_1^2 + \alpha_1^3)$, $[1111] = a_4 + a_3\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + a_1\alpha_1^3 + \alpha_1^4$ und im Allge-

35*

meinen die Summe der Combinationen zu m Elementen von $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ gleich $(-1)^m (a_m + a_{m-1} \alpha_1 + a_{m-2} \alpha_1^2 + \ldots a_1 \alpha_1^{m-1} + \alpha_1^m)$. Da nun alle symmetrischen ganzen Functionen von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sich nach §. 1. als ganze, in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen von $[1]_1$, $[11]_1$, $[111]_1$ etc. darstellen lassen, und diese ebenfalls ganze Functionen von α_1 und den Coëfficienten der Gleichung sind, so folgt, dass die symmetrischen Functionen von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sich ebenfalls als ganze, in ganzen Zahlen ausgedrückte Functionen von α_1 und den Coëfficienten der Gleichung darstellen lassen.

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass man obige Entwickelungen auch aus der Division von $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ durch $x - \alpha_1$ hätte ableiten können.

Anmerkung. Die Gleichung für $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ wird offenbar folgende sein: $x^{n-1} + (a_1 + \alpha_1) x^{n-2} + (a_2 + a_1 \alpha_1 + \alpha_1^2) x^{n-3} + \ldots$

$$+ (a_{n-1} + a_{n-2} \alpha_1 + a_{n-3} \alpha_1^2 + a_{n-4} \alpha_1^3 + \ldots a_1 \alpha_1^{n-2} + \alpha_1^{n-1}) = 0.$$

Setzt man voraus, dass diese Gleichung für $x = \alpha_1$ realisirt wird, so findet man, wenn man α_1 statt x setzt und nach α_1 ordnet:

$$n \alpha_1^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha_1^{n-2} + (n-2) a_2 \alpha_1^{n-3} + \ldots a_{n-1} = 0.$$

Hieraus folget leicht, dass, wenn die Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ zwei gleiche Wurzeln α_1 haben soll, sie eben diese Wurzel mit der Gleichung $n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1} = 0$ gemeinschaftlich haben muss. Dieser Satz wird fast in allen Lehrbüchern aus der Differential-Rechnung abgeleitet; welches aber offenbar nicht naturgemäss ist.

§. 3.

Erklärung und Lehrsatz. Eine ganze rationale Function von x, deren Coëfficienten rationale Zahlen sind, soll *irreductibel* heissen, wenn sie sich nicht in zwei Factoren zerfällen lässt, deren jeder wieder eine ähnliche Function von x von einem niedrigeren Grade als die ursprüngliche ist.

Setzt man eine irreductible Function von x gleich 0, so soll diese Gleichung ebenfalls irreductibel heissen.

Eine irreductible Gleichung kann mit einer andern, deren Coëfficienten ebenfalls rationale Zahlen sind, keine Wurzel gemeinschaftlich haben, ohne alle Wurzeln mit ihr gemeinschaftlich zu haben.

Beweis. Gesetzt $fx = 0$ sei eine irreductible Gleichung, so ist zunächst zu zeigen, dass, wenn $\varphi x = 0$ eine Gleichung von einem niedrigeren Grade als $fx = 0$ bedeutet, deren Coëfficienten ebenfalls rationale Zahlen sind, fx und φx keine Wurzel gemeinschaftlich haben können. Unter dieser Vor-

aussetzung müsste sich nämlich ein gemeinschaftlicher algebraischer Theiler, dessen Coëfficienten rationale Zahlen sind, nach der Methode, den grössten algebraischen Theiler zweier Functionen zu finden, zwischen φx und fx aufstellen lassen. Da aber fx überhaupt keinen solchen Theiler zulassen kann, so ist die erste Voraussetzung nicht statthaft. Gesetzt nun, φx sei von gleichem oder höherem Grade wie fx, so bringe man φx durch algebraische Division mit fx auf die Form $fx.Qx+Rx$, wo Qx den algebraischen Quotienten und Rx den Rest angiebt, welchen φx bei der Division durch fx erzeugt. Hätte nun φx oder $fx.Qx+Rx$ eine gemeinschaftliche Wurzel mit fx, so müsste auch Rx dieselbe haben. Da aber Rx von einem niedrigeren Grade als fx ist, so geht dies nicht an; dem eben Bewiesenen zufolge. Es kann mithin unter der gemachten Voraussetzung gar kein Rx existiren, oder es muss sich φx ohne Rest durch fx theilen lassen. Die Gleichung $\varphi x=0$ enthält mithin sämmtliche Wurzeln der Gleichung $fx=0$.

Zusatz. Aus der Anmerkung in §. 2. ergiebt sich leicht, dass die Gleichung $fx=0$ nicht zwei gleiche Wurzeln haben kann.

Anmerkung. Die in diesem §. entwickelten Sätze gebühren dem berühmten *Abel.* Vergl. dieses Journal Tom. IV. Seite 131.

§. 4.

Lehrsatz. Ist die Gleichung $fx=0$ irreductibel, und sind α_1, α_2, $\dots\alpha_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, so sind die Werthe irgend einer rationalen Function von x, deren Coëfficienten rationale Zahlen sind, wenn man in dieselbe nach der Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ statt x setzt, die Wurzeln einer irreductibeln Gleichung.

Beweis. Bezeichnet man die rationale Function von x durch φx, so werden $\varphi\alpha_1, \varphi\alpha_2, \dots \varphi\alpha_n$ von der Gleichung $(z-\varphi\alpha_1)(z-\varphi\alpha_2)\dots(z-\varphi\alpha_n)=0$ abhangen. Offenbar werden die Coëfficienten dieser Gleichung symmetrische Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sein, und sich mithin durch Coëfficienten von fx rational darstellen lassen. Da diese Coëfficienten selbst aber rationale Zahlen sind, so werden die Coëfficienten von $(z-\varphi\alpha_1)(z-\varphi\alpha_2)\dots(z-\varphi\alpha_n)$ ebenfalls rationale Zahlen sein. Setzt man nun $(z-\varphi\alpha_1)(z-\varphi\alpha_2)\dots(z-\varphi\alpha_n)=Fz$, so ist zu zeigen, dass Fz die Potenz eines irreductibeln Ausdrucks sei. Gesetzt Fz sei dem Product zweier in rationalen Zahlen ausgedrückten Functionen von niedrigerem Grade als dem $n$ten gleich, so kann man die eine derselben, welche mit dz bezeichnet werden soll, als die Potenz

einer irreductibeln Function von z ansehen, die mit dem andern Factor $d_1 z$ keinen algebraischen Divisor mehr gemeinschaftlich hat. Da nun $Dz = dz\, d_1 z$ ist, so müssen die Wurzeln der Gleichungen $dz = 0$ und $d_1 z = 0$ in $\varphi\alpha_1$, $\varphi\alpha_2$, ... $\varphi\alpha_n$ enthalten sein. Setzt man in die beiden Gleichungen $dz = 0$ und $d_1 z = 0$ statt z seinen Ausdruck in x, nämlich φx, so müssen die Gleichungen $d\varphi x = 0$ und $d_1 \varphi x = 0$ mit der Gleichung $fx = 0$ gewisse Wurzeln gemeinschaftlich haben. Deshalb muss aber fx sowohl ein Factor von $d\varphi x$ als von $d_1 \varphi x$ sein (§. 3.). Offenbar hätten also die Gleichungen $dz = 0$ und $d_1 z = 0$ die Wurzeln $\varphi\alpha_1$, $\varphi\alpha_2$, ... $\varphi\alpha_n$ gemeinschaftlich. Nennt man nun dz den irreductibeln Ausdruck von z, von welchem dz Potenz ist, so müssen auch die Gleichungen $dz = 0$ und $\delta z = 0$ die Wurzeln $\varphi\alpha_1$, $\varphi\alpha_2$, ... $\varphi\alpha_n$ gemeinschaftlich haben. Mithin müssten auch δz und $d_1 z$ diese Wurzeln gemeinschaftlich haben. Dann würde aber folgen, dass δz ebenfalls ein Factor von $d_1 z$ sein müsse. Dies ist gegen die Voraussetzung. Es muss mithin Fz allein durch dz, welches eine Potenz des irreductibeln Factors δz ist, dargestellt werden, und mithin hängen die Werthe $\varphi\alpha_1$, $\varphi\alpha_2$ ... $\varphi\alpha_n$ allein von der irreductibeln Gleichung $\delta z = 0$ ab.

§. 5

Erklärung und Lehrsatz. Ist $fx = 0$ eine Gleichung vom $n$ten Grade, deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind, und $\varphi x = 0$ eine Gleichung vom $m$ten Grade, deren Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ sind, so soll das Product $f\beta_1, f\beta_2, \ldots f\beta_m$ die Norm von f in Bezug auf φ heissen und durch Nf_φ oder $N(f_\varphi)$ bezeichnet werden. Da Nf_φ eine symmetrische Function der Wurzeln von $\varphi x = 0$ ist, so lässt es sich durch die Coëfficienten dieser Gleichung und durch ganze Zahlen ausdrücken (§. 1.).

Sind die Coëfficienten der höchsten Potenzen von fx und φx gleich 1, so ist die Norm von f in Bezug auf φ gleich der Norm von φ in Bezug auf f, positiv oder negativ genommen, je nachdem $n.m$ gerade oder ungerade ist, oder, in allgemeinen Zeichen, $Nf_\varphi = N\varphi_f(-1)^{nm}$.

Beweis. Da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln von $fx = 0$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta^m$ die Wurzeln von $\varphi x = 0$ sind, so kann man $fx = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ und $\varphi x = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_m)$ setzen. Offenbar ist nun

$$Nf_\varphi = f\beta_1 . f\beta_2 \ldots f\beta_m = (\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2) \ldots (\beta_1-\alpha_n) .$$
$$(\beta_2-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2) \ldots (\beta_2-\alpha_n) .$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\beta_m-\alpha_1)(\beta_m-\alpha_2) \ldots (\beta_m-\alpha_n)$$

und $N\varphi_f = \varphi\alpha_1 . \varphi\alpha_2 \ldots \varphi\alpha_n = (\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2) \ldots (\alpha_1-\beta_m) .$
$$(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2) \ldots (\alpha_2-\beta_m) .$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha_n-\beta_1)(\alpha_n-\beta_2) \ldots (\alpha_n-\beta_m) .$$

Vergleicht man die in einer horizontalen Reihe stehenden Factoren des einen Products mit den in einer verticalen Reihe stehenden des andern, so findet sich, dass die einen die negativen Werthe der andern bilden, und hieraus folgt der Satz unmittelbar.

§. 6.

Lehrsatz. Ist $fx = 0$ eine irreductibele Gleichung und $\varphi x = 0$ eine Gleichung, deren Coëfficienten rationale Zahlen sind, so ist fx ein algebraischer Divisor von φx, wenn $Nf_\varphi = 0$ ist.

Beweis. Offenbar kann Nf_φ nur dann gleich 0 werden, wenn die Gleichungen $fx = 0$ und $\varphi x = 0$ eine gleiche Wurzel haben; alsdann ist aber $f\varphi$ ein algebraischer Divisor von φx (§. 3.).

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der höhern Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist.

---

§. 1.

Erklärungen. Eine rationale ganze Function von x, in welcher diese Grösse bis zum $n$ten Grade steigt und deren Coëfficienten ganze Zahlen sind, wird in Folgendem schlechtweg ein Ausdruck vom $n$ten Grade genannt werden. Zwei solche Ausdrücke werden ferner nach einer Primzahl g congruent heissen, wenn die Coëfficienten der entsprechenden Potenzen von x in beiden nach dem Modul p congruent sind, und sie sollen fortan ebenfalls durch das Zeichen $\equiv$ verbunden werden, so dass also

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n (\text{mod.}\, p)$ nichts weiter heisst, als dass $a_0 \equiv b_0$, $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2 \ldots a_n \equiv b_n$ in Bezug auf den Modul p ist.

Ein solcher Ausdruck wird ein *einfacher* genannt, wenn der Coëfficient der höchsten Potenz von x gleich 1, und ein *vielfacher*, wenn derselbe weder 1 noch ein Vielfaches von p ist; dagegen ein Ausdruck, in welchem der Coëfficient der höchsten Potenz von x, nebst mehreren der folgenden, ein Vielfaches von p ist, nach der Natur des Gegenstandes der folgenden Untersuchung demjenigen niedrigeren Grade beigesellt wird, welcher die höchste Potenz von x angiebt, deren Coëfficient nicht mit p aufgeht.

Setzt man einen Ausdruck gleich 0, so sollen die Wurzeln der hieraus hervorgehenden Gleichung auch Wurzeln des Ausdrucks heissen.

§. 2.

Lehrsatz. Jeder vielfache Ausdruck von x ist einem einfachen Ausdrucke desselben Grades, multiplicirt in den Coëfficienten der höchsten Potenz von x, nach irgend einem Modul p congruent.

Beweis. Es sei der vielfache Ausdruck von x, $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, so ergiebt sich, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ durch die Congruenzen $a_0 \alpha_1 \equiv a_1$ (mod. p), $a_0 \alpha_2 \equiv a_2 (\text{mod.}\, p) \ldots a_0 \alpha^n \equiv (\text{mod.}\, p)$ bestimmt (§. 7. Einl.), dass $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv a_0 \{x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots x_n\}$ (mod. p) sei. Hierdurch ist der Satz bewiesen.

Zusatz. Wenn mehrere der ersten Coëfficienten a_0, a_1, a_2 etc. hinter einander $\equiv 0$ (mod. p) sind, nicht aber der ganze Ausdruck $\equiv 0$ (mod. p) ist, so ist er wiederum congruent dem Product des Coëfficienten der höchsten Potenz von x, der nicht $\equiv 0$ (mod. p) ist, in einen einfachen Ausdruck desselben Grades.

§. 3.

Erklärungen. Ist es möglich, ein Product zweier Ausdrücke aufzustellen (von denen aber keiner einem niedrigeren Grade als dem ersten angehört), das einem gegebenen Ausdrucke nach dem Modul p congruent wird, so soll jeder der Factoren *ein Factor oder ein Divisor des gegebenen Ausdrucks in Bezug auf den Modul* p, oder, wenn keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, bloss ein Factor oder Divisor desselben heissen. Sind jene Factoren einfache Ausdrücke, so sollen sie *einfache Factoren oder Divisoren* des gegebenen Ausdrucks genannt werden.

Ein Ausdruck vom $n$ten Grade, der keinen Divisor hat, soll ein *irreductibler Ausdruck vom $n$ten Grade* heissen.

Ist also $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m)(c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \ldots + c_m)$ (mod. p) und $m < n$ und $m > 1$, so sollen $b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ und $c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m}$ Factoren oder Divisoren von $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ heissen. Bestimmt man ferner $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ so, dass $b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m \equiv b_0 (x^m + \beta_1 x^{m-1} + \beta_2 x^{m-2} + \ldots + \beta_m)$ (mod. p) ist, so wird der einfache Ausdruck $x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots \beta_m$ ein einfacher Factor oder Divisor von $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ heissen.

Zusatz. Die obige Congruenz kann man nun offenbar als Gleichung auch so schreiben: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = b_0 (x_m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_m)(c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m}) + pFx$, wo Fx im Allgemeinen einen Ausdruck vom $n$ten Grade bedeutet. Dividirt man diese Gleichung algebraisch durch den einfachen Ausdruck $x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_m$, so muss offenbar der Rest, welchen $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ bei der Division giebt, gleich dem Reste sein, welchen pFx giebt. Die Coëfficienten dieses Restes werden aber, wie leicht ersichtlich, sämmtlich mit p aufgehen, mithin müssen auch die Coëfficienten vom Reste des gegebenen Ausdrucks durch p theilbar sein. Hat demnach der gegebene Ausdruck irgend einen Divisor, so muss er auch, durch den einfachen Ausdruck dieses Divisors dividirt, einen Rest geben, der $\equiv 0$ (mod. p) zu setzen ist.

Die Umkehrung dieses Satzes ist, wie leicht zu sehen, ebenfalls richtig, und heisst: Giebt ein Ausdruck, durch einen zweiten algebraisch dividirt, einen Rest, dessen Coëfficienten nach dem Modul p congruent 0 sind, so ist der zweite Ausdruck ein Divisor des ersten.

§. 4.

Lehrsatz. Das Product zweier einfachen Ausdrücke von x kann nicht $\equiv 0$ (mod. p) sein.

Beweis. Ist der eine Ausdruck vom $m$ten, der andere vom $n$ten Grade, so ist offenbar das erste Glied der Entwickelung des Products x^{n+m}; und da der Coefficient dieses Gliedes gleich 1 und daher nicht $\equiv 0$ (mod. p) ist, so darf der ganze Ausdruck nicht $\equiv 0$ (mod. p) gesetzt werden.

Zusatz. Man leitet hieraus leicht den allgemeinen Satz ab: dass das Product zweier Ausdrücke nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden kann, wenn nicht einer von ihnen $\equiv 0$ (mod. p) ist (§. 2.).

§. 5.

Lehrsatz. Ist das Product eines Ausdrucks in einen irreductibeln einfachen Ausdruck dem Producte zweier andern Ausdrücke von x nach dem Modul p congruent, so hat einer derselben den irreductibeln Ausdruck nach dem Modul p zum Divisor.

Dieser Satz soll zunächst für $n=1$ und $n=2$ und dann durch den Schluss von n auf $n+1$ allgemein bewiesen werden.

Beweis. Is also $n=1$ und ist $x+a_1$ der irreductible Factor vom ersten Grade; bedeuten ferner fx, Ax und Bx Ausdrücke von x, so ist zu zeigen, dass, wenn $(x+a_1)fx \equiv Ax\, Bx \pmod{p}$ ist, $x+a_1$ ein Factor von Ax oder von Bx sein müsse. Aus obiger Congruenz folgt aber, dass $Ax\,Bx$ für $x \equiv -a_1 \pmod{p}$ congruent 0, und hieraus, dass entweder $A(-a_1)$ oder $B(-a_1)$ congruent 0 werden müsse. Gesetzt nun $A(-a_1)$ wäre $\equiv \pmod{p}$, so hat man $Ax \equiv Ax - A(-a_1) \pmod{p}$: aber $Ax - A(-a_1)$ hat offenbar die Wurzel $-a_1$ und daher den Factor $x+a_1$, woraus denn folgt, dass Ax in Bezug auf den Modul p den Factor $x+a_1$ habe.

Ist ferner $n=2$, so sei der irreductible einfache Ausdruck $x^2+a_1x+a_2$ und $(x^2+a_1x+a_2)fx \equiv Ax\,Bx \pmod{p}$. Gesetzt nun Ax habe nicht den Factor $x^2+a_1x+a_2$, so muss ihn Bx haben. Um dies zu beweisen, nenne man den algebraischen Quotienten, den man erhält, wenn man Bx durch $x^2+a_1x+a_2$ dividirt, Qx und den Rest $\alpha x+\beta$, so ist $Bx = (x^2+a_1x+a_2)\,Qx+\alpha x+\beta$. Substituirt man diesen Ausdruck in obiger Congruenz, so erhält man $(x^2+a_1x+a_2)(fx-Qx\,Ax) \equiv (\alpha x+\beta)\,Ax \pmod{p}$. Es ist nun zu zeigen, dass $\alpha x+\beta \equiv 0 \pmod{p}$ oder dass $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$ und $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ und mithin $Bx \equiv (x^2+a_1x+a_2)\,Qx \pmod{p}$ sei. Wäre α nicht $\equiv 0 \pmod{p}$, so bestimme man β_1 so, dass $\alpha(x+\beta_1) \equiv \alpha x+\beta \pmod{p}$, und α_1 so, dass $\alpha\alpha_1 \equiv 1 \pmod{p}$ sei: alsdann erhält man offenbar $\alpha\alpha_1(x^2+a_1x+a_2)\,Mx \equiv \alpha(x+\beta_1)\,Ax \pmod{p}$, wo $Mx = fx - Qx.Ax$ ist, und hieraus $\alpha_1(x^2+a_1x+a_2)\,Mx \equiv (x+\beta_1)\,Ax \pmod{p}$. Da nun $x+\beta_1$ ein Factor vom ersten Grade ist, so muss er nach Obigem (da $x^2+a_1x+a_2$ als irreductibler Ausdruck ihn nicht enthalten kann) in Mx enthalten sein. Setzt man also $Mx \equiv (x+\beta_1)\,Q_1x$, so erhält man $\{\alpha_1(x^2+a_1x+a_2)\,Q_1x - Ax\}(x+\beta_1) \equiv 0 \pmod{p}$. Da nun $x+\beta_1$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so müsste $\alpha(x^2+a_1x+a_2)\,Q_1x - Ax \equiv 0 \pmod{p}$ oder $\alpha(x^2+a_1x+a_2)\,Q_1x \equiv Ax \pmod{p}$ und daher $x^2+a_1x+a_2$, gegen die Voraussetzung, ein Factor von Ax sein. Wäre $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$, aber nicht

$\beta \equiv 0$, so bestimme man β_1 so, dass $\beta\beta_1 \equiv 1$ (mod. p) werde; alsdann leitet man leicht aus der obigen Congruenz $(x^2 + a_1 x + a_2)(fx - Qx . Ax) \equiv (\alpha x + \beta) Ax$ (mod. p) die folgende ab: $\beta_1(x^2 + a_1 x + a_2)(fx - Qx\, Ax) \equiv Ax$ (mod. p) Hiernach wäre aber wieder $x^2 + a_1 x + a_1$ ein Factor von Ax, gegen die Voraussetzung. Es muss also $\alpha \equiv 0$ und $\beta \equiv 0$ (mod p) sein.

Wir wollen nun voraussetzen, der Satz sei bis zu dem Grade n bewiesen, und zeigen, er gelte auch für den Grad $n+1$. Es sei demnach φx ein irreductibler Ausdruck vom Grade $n+1$ und $\varphi x f x \equiv Ax Bx$ (mod. p). Ferner setze man voraus, Ax habe nicht den Divisor φx, und bezeichne den algebraischen Quotienten, den man erhält, wenn man Bx durch φx dividirt, durch Qx, und den Rest, welcher den $n$ten Grad nicht überschreiten kann, durch Rx, so hat man $Bx = \varphi x . Qx + Rx$, mithin $\varphi x(fx - Ax\, Qx) \equiv Ax\, Rx$ (mod. p). Es ist nun zu zeigen, dass $Rx \equiv 0$ (mod. p) sei. Wäre Rx nicht $\equiv 0$ (mod. p), so könnte man, wenn α der Factor der höchsten Potenz von Rx ist, der nicht $\equiv 0$ (mod. p) wird, einen einfachen Ausdruck $R_1 x$ so bestimmen, dass $Rx \equiv \alpha R_1 x$ (mod. p) ist. Bestimmt nun α_1 so, dass $\alpha\alpha_1 \equiv 1$ (mod. p), so zeigt sich leicht, dass $\alpha_1\ \varphi x\,(fx - Ax\, Qx) \equiv Ax\, R_1 x$ (mod. p) sein müsse. Da der Grad von $R_1 x$ die Zahl n nicht überschreiten kann und φx irreductibel ist, so muss $R_1 x$ ein Factor von $\alpha_1(fx - Ax\, Qx)$ sein. Setzt man also $\alpha_1(fx - Ax . Qx) \equiv Fx R_1 x$ (mod. p, so leitet man daraus sehr leicht $R_1 x(\varphi x Fx - Ax) \equiv 0$ (mod, p) ab. Wäre nun $R_1 x$ nicht $\equiv 0$, so müsste es $\varphi x fx - Ax$ oder $\varphi x . Fx \equiv Ax$ (mod. p) und daher φx gegen die Voraussetzung ein Factor von Ax sein. Es muss mithin $Rx \equiv 0$ (mod. p) und φx ein Factor von Bx sein.

§. 6.

Lehrsatz. Jeder Ausdruck kann n u r a u f e i n e W e i s e dem Product einfacher irreductibler Ausdrücke und einer Zahl congruent gesetzt werden.

Beweis. Bedeutet α eine Zahl, und Ax, Bx, Cx etc. sind einfache irreductible Ausdrücke von x, ferner m, n, p etc. ganze positive Exponenten, so ist zu zeigen, dass $\alpha(Ax)^m(Bx)^n(Cx)^p$ etc. sich nicht congruent setzen lasse einem Producte, welches aus seinen einfachen irreductiblen Factoren anders als das vorliegende zusammengesetzt ist. Aus §. 5. folgt zunächst, dass jede vorausgesetzte andere Zerfällung ebenfalls nur die einfachen irreductiblen Factoren Ax, Bx, Cx etc. enthalten könne. Wollte man nun voraussetzen, irgend ein Factor, z. B. Ax, könne in einer andern Potenz als in der $m$ten vorkommen, so setze man $\alpha(Ax)_m(Bx)^n(Cx)^p$ etc. $\equiv \alpha(Ax)^{m_1}(Bx)^{n_1}(Cx)^{p_1}$ etc. und $m > m_1$:

so erhält man leicht $\alpha(Ax)^{m-m_1}[(Ax)^{m-m_1}(Bx)^n(Cx)^p$ etc. $-(Bx)^{n_1}(Cx)^{p_1}$ etc.$]$ $\equiv 0$ (mod. p). Da $\alpha(Ax)^{m-m_1}$ nicht $\equiv 0$ (mod. p) sein kann, so muss $(Ax)^{m-m_1}$ $(Bx)^n(Cx)^p$ etc. $-(Bx)^{n_1}(Cx)^{p_1}$ etc. $\equiv 0$ (mod. p) und mithin $(Ax)^{m-m_1}$ und daher auch Ax ein Factor von $(Bx)^{n_1}(Cx)^{p_1}$ etc. sein. Da dies sich aber durch §. 5. leicht als unmöglich nachweisen lässt, so muss $m=m_1$ sein.

§. 7.

Lehrsatz. Jeder Ausdruck, dessen Wurzeln, in eine bestimmte Potenz eines irreductibeln Ausdrucks gesetzt, dieselbe, wenn sie mit einer gewissen Zahl, die nicht $\equiv 0$ (mod. p) ist, multiplicirt wird, einem bestimmten $p$fachen Ausdrücke der jedesmaligen Wurzel gleich machen, ist selbst eine Potenz jenes irreductibeln Ausdruckes in Bezug auf den Modul p.

Beweis. Gesetzt fx sei die Potenz eines einfachen irreductibeln Ausdruckes, und Fx irgend ein einfacher Ausdruck, dessen Wurzeln α_1, α_2, ... α_n sind; ferner bezeichne Nx irgend einen Ausdruck von x, und z eine ganze Zahl: so wäre obige Voraussetzung durch folgende Gleichungen ausgedrückt: $zf\alpha_1 = pN\alpha_1$, $zf\alpha_2, = pN\alpha_2$, ... $zf\alpha_n = pN\alpha_n$. Zu beweisen ist, dass Fx einer Potenz desjenigen Ausdruckes congruent sei, von welchem fx Potenz ist. Da $zfx - pNx$ für jede Wurzel von Fx verschwindet, so kann man $zfx - pNx = (x-\alpha_1)\,Q(x,\alpha_1)$ setzen, wo $Q(x,\alpha_1)$, als Quotient von $zfx - pNx$ durch $x-\alpha_1$, eine Function vom $(n-1)$ten Grade ist, in deren Coefficienten α_1 eintritt. Ebenso erhält man $zfx - pNx = (x-\alpha_2)\,Q(x,\alpha_2)$ etc. Setzt man diese Gleichungen unter einander, so erhält man

$$\begin{aligned} zfx - pNx &= (x-\alpha_1)\,Q(x,\alpha_1) \\ zfx - pNx &= (x-\alpha_2)\,Q(x,\alpha_2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ zfx - pNx &= (x-\alpha_n)\,Q(x,\alpha_n)\,. \end{aligned}$$

Multiplicirt man sie in einander und bedenkt, dass $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = Fx$ ist, so erhält man die Congruenz $(zfx)^n \equiv Fx\;Q(x-\alpha_1)$ $Q(x,\alpha_2)\ldots Q(x,\alpha_n)$ (mod. p). Die Coefficienten von $Q(x,\alpha_1)$. $Q(x,\alpha_2)$ ... $Q(x,\alpha_n)$ müssen offenbar symmetrische Functionen von α_1, α_2, ... α_n und mithin ganze Zahlen sein. Schreibt man daher für dies Product den Ausdruck Mx, so erhält man $(zfx)^n \equiv Fx.Mx$ (mod. p), und hiernach ist offenbar Fx ein Factor von $(fx)^n$, und da $(fx)^n$ die $n$te Potenz einer Potenz eines irreductibeln Ausdrucks, mithin selbst eine Potenz desselben irreductibeln

Ausdrucks ist, so kann Fx, als Divisor einer solchen, selbst nur die Potenz jenes irreductibeln Ausdrucks sein.

§. 8.

Lehrsatz. Ist die Norm eines einfachen Ausdrucks in Bezug auf einen zweiten einfachen Ausdruck congruent 0 (mod. p), so ist auch die Norm des zweiten, in Bezug auf den ersten, congruent 0 (mod. p).

Beweis. Nennt man die einfachen Ausdrücke, um die es sich handelt, fx und φx, so folgt zunächst (§. 5. Einl.), dass Nf_φ und $N\varphi_f$ ganze Zahlen sein werden, weil nämlich die Coefficienten von fx und von φx ganze Zahlen sind. Da nun aber (§. 5. Einl.) $\pm N\varphi_f = Nf_\varphi$ ist, so folgt, dass $N\varphi_f$ und Nf_φ stets zugleich $\equiv 0$ (mod. p) sein müssen.

§. 9.

Lehrsatz. Die Norm eines Ausdrucks in Bezug auf einen zweiten Ausdruck, der dem Product mehrerer Ausdrücke congruent ist, ist dem Product der Normen des ersten Ausdrucks in Bezug auf sämmtliche Factoren des zweiten congruent. Oder wenn fx, φx, Ax, Bx, Cx etc. Ausdrücke von x bedeuten, und $\varphi x \equiv Ax.Bx.Cx$ . . (mod. p) ist, so hat man $Nf_\varphi \equiv Nf_A.Nf_B.Nf_C$ etc. (mod. p).

Beweis. Man kann annehmen, dass sämmtliche hier auftretende Ausdrücke einfache sind; denn die Verallgemeinerung ergiebt sich hieraus leicht. Zunächst ist nun zu bemerken, dass die symmetrischen Functionen der Wurzeln von φx und von $Ax.Bx.Cx$ ... nach dem Modul p congruent sein werden. Da nämlich $\varphi x \equiv Ax.Bx.Cx$ ... (mod. p) ist, so muss $\varphi x + pFx = Ax.Bx.Cx$ ... sein, wo Fx irgend einen Ausdruck von x bedeutet. Offenbar werden aber die symmetrischen Functionen der Wurzeln von φx und von $\varphi x + pFx$ nach dem Modul p congruent sein, weil sie als Ausdrücke congruenter Zahlen, nämlich der Coefficienten von φx und von $\varphi x + pFx$, angesehen werden können (§. 1. Einl.). Mithin wird die Norm von fx in Bezug auf $\varphi x + pFx$ congruent der Norm von fx in Bezug auf φx sein. Da $\varphi x + pFx = Ax.Bx.Cx$ ... ist, so wird also auch die Norm von fx in Bezug auf φx congruent der Norm von fx in Bezug auf $Ax.Bx.Cx$ .. sein. Löset man aber diese Norm (§. 5. Einl.) in ihre Factoren auf, so folgt, dass sie in Bezug auf $Ax\,Bx\,Cx$ ... gleich $Nf_A.Bf_B.Nf_C$ ... sein werde, und hieraus folgt $Nf_\varphi \equiv Nf_A\,Nf_B\,Nf_C$ (mod. p); was zu beweisen war.

Zusatz. Nf_φ kann also nur $\equiv 0$ (mod. p) werden, wenn eine der Grössen Nf_A, Nf_B, Bf_C ... congruent 0 (mod. p) wird.

§. 10.

Lehrsatz. Die Norm eines irreductibeln einfachen Ausdrucks kann in Bezug auf einen zweiten Ausdruck von geringerem Grade nicht congruent 0 (mod. p) werden.

Ist also fx irreductibel und der Grad von φx kleiner als der von fx, so ist zu zeigen, dass Nf_φ nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden kann. Zuerst soll der Grad von φx gleich 1, dann gleich zwei angenommen, und dann soll im Allgemeinen die Richtigkeit des Satzes durch den Schluss von m auf $m+1$ gezeigt werden.

Beweis. Ist φx vom Grade 1, also gleich $x+a_1$, so ist $Nf_\varphi = f(-a_1)$. Wäre aber $f(-a_1) \equiv 0$ (mod. p), so hätte fx den Factor $x+a_1$ in Bezug auf den Modul p und wäre daher nicht irreductibel. Es kann mithin für diesen Fall Nf_φ nicht $\equiv 0$ (mod. p) sein.

Setzt man, φx sei vom zweiten Grade, so ist zu unterscheiden, ob es irreductibel ist, oder nicht. Der zweite Fall ist leicht abzuthun. Setzt man nämlich $\varphi x \equiv \varphi_1 x . \varphi_2 x$ (mod. p), so kann Nf_φ nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden, wenn keiner von den Ausdrücken Nf_{φ_1} und Nf_{φ_2} congruent 0 (mod. p) wird (§. 9.). Da aber $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ vom ersten Grade sind, so geht dies nicht an. Ist nun φx ein irreductibler Ausdruck, so nenne man den algebraischen Quotienten, den fx durch φx dividirt giebt, Qx und den Rest Rx. Offenbar muss, da $fx = Qx . \varphi x + Rx$ ist, $f\beta_1 \, f\beta_2 = (Q\beta_1 \, \varphi\beta_1 + R\beta_1)(Q\beta_2 \, \varphi\beta_2 + R\beta_2)$ sein. Setzt man β_1 und β_2, als die beiden Wurzeln von φx, $= 0$, so erhält man $f\beta_1 \, f\beta_2 = Nf_\varphi = R\beta_1 \, R\beta_2$. Da nun Rx im Allgemeinen vom 1ten Grade ist, so setze man $Rx \equiv a(x+\alpha_1)$ (mod. p) und $(x+\alpha_1) = R_1 x$; dann erhält man $Nf_\varphi \equiv \alpha^2 R_1 \beta_1 R_1 \beta_2 \equiv \alpha^2 NR_{1\varphi}$. Sollte dieser Ausdruck $\equiv 0$ (mod. p) werden, so müsste $NR_{1\varphi}$ und mithin auch $N\varphi_{R_1}$ congruent 0 (mod. p) werden (§. 8.). Da aber φx irreductibel und $R_1 x$ von einem geringeren Grade als φx ist, so geht dies wegen des vorher Bewiesenen nicht an.

Setzt man nun voraus, es sei bewiesen, Nf_φ könne nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden, wenn fx irreductibel und der Grad von φx gleich m ist, so ist jetzt zu zeigen, dass Nf_φ ebenfalls nicht $\equiv 0$ (mod p) werden könne, wenn der

Grad von φx gleich $m+1$ ist, insofern nur der Grad von fx grösser als $m+1$ ist.

Es sei also jetzt φx vom Grade $m+1$, so ist wieder zu unterscheiden, ob φx irreductibel sei, oder nicht. Ist φx nicht irreductibel, so setze man $\varphi x \equiv Ax \,.\, Bx$ (mod. p). Da nun Nf_φ nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden kann, wenn nicht einer der Factoren Nf_A oder $Nf_B \equiv 0$ (mod. p) wird (§. 10), diese Factoren aber nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden können, weil ihr Grad die Zahl m nicht überschreiten kann (bis zu welcher Zahl der Satz als bewiesen angenommen wird), so kann Nf_φ nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden, wenn φx nicht irreductibel ist. Man setze jetzt voraus, φx sei irreductibel, und bezeichne den Quotienten, den fx durch φx dividirt giebt, durch Qx und den Rest durch Rx, so erhält man $fx = \varphi x \,.\, Qx + Rx$. Da nun für jede Wurzel von φx, etwa für β_1, $f\beta_1 = R\beta_1$ ist (weil $\varphi\beta_1 = 0$), so hat man auch $Nf_\varphi = NR_\varphi$. Rx kann zwar nicht $\equiv 0$ (mod. p) sein, weil sonst fx nicht irreductibel wäre, wird aber im Allgemeinen kein einfacher Ausdruck sein: man setze es daher dem Producte einer Zahl α und eines einfachen Ausdrucks $R_1 x$ congruent (§. 2.), so erhält man $Rx \equiv \alpha R_1 x$ (mod. p) und $NR_\varphi \equiv \alpha^{m+1} NR_1\varphi$ (mod. p). Es kann mithin NR_φ nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden, ohne dass es $= NR_1\varphi$ zugleich würde. $NR_1\varphi$ kann aber nicht $\equiv 0$ (mod. p) werden, wenn nicht zugleich $N\varphi_{R_1}$ congruent 0 (mod. p) wird (§. 8.) Dies geht nicht an, weil φx irreductibel ist und $R_1 x$ den Grad m nicht überschreiten kann: es kann mithin auch nicht NR_φ und auch nicht Nf_φ congruent 0 (mod. p) werden.

§. 11.

Lehrsatz. Ist fx ein irreductibler Ausdruck und φx irgend ein einfacher Ausdruck, so ist fx ein Divisor von φx in Bezug auf den Modul p, wenn $Nf_\varphi \equiv 0$ (mod. p) ist; und umgekehrt.

Beweis. Ist $Nf_\varphi \equiv 0$ (mod. p), so kann nach §. 10 der Grad von φx nicht kleiner als der von fx sein. Nun setze man $fx \equiv kf_1 x$ (mod. p), wo k eine Zahl und $f_1 x$ einen einfachen Ausdruck bedeutet (§. 2.). Bezeichnet man nun den Grad von φx durch m, so erhält man $Nf_\varphi = k^m Nf_{1\varphi}$. Sollte demnach $Nf_\varphi \equiv 0$ (mod. p) werden, so müsste auch $Nf_{1\varphi} \equiv 0$ (mod. p) werden. Setzt man nun aber $\varphi x = f_1 x \,.\, Qx + Rx$, wo Qx den Quotienten bezeichnet, den man erhält, wenn man φx durch $f_1 x$ dividirt, und Rx den Rest: so bemerke

man, dass, wenn $Nf_{1\varphi} \equiv 0$ (mod. p) wird, auch $N\varphi_{f_1} \equiv 0$ (mod. p) ist (§. 8.). Aber $N\varphi_{f_1}$ ist offenbar, da $\varphi x = f_1 x . Qx + Rx$ gleich NR_{f_1}; und dieser Ausdruck kann nicht $= 0$ (mod. p) werden, wenn nicht zugleich $Nf_{1R} \equiv 0$ (mod. p) wird. Da aber $f_1 x$ irreductibel und Rx von einem niedrigeren Grade als fx ist, so geht diess nicht an (§. 10.). Da dieser Widerspruch nur wegfällt, wenn $Rx \equiv 0$ (mod. p), so muss fx in Bezug auf den Modul p ein Divisor von φx sein, wenn $Nf_\varphi \equiv 0$ (mod. p) ist.

Die Umkehrung des Satzes ergiebt sich leicht.

§. 12.

Lehrsatz. Entwickelt man die Gleichung für einen Ausdruck der Wurzel eines in Bezug auf den Modul p einfachen irreductibeln Ausdrucks und bezeichnet dieselbe durch $Fz = 0$, so ist Fz in Bezug auf den Modul p entweder irreductibel, oder die Potenz eines irreductibeln Ausdruckes.

Gesetzt also, fz wäre ein einfacher irreductibler Ausdruck und seine Wurzeln wären $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; bezeichnet ferner φx irgend einen Ausdruck von x, so hangen die Grössen $\varphi\alpha_1, \varphi\alpha_2, \ldots \varphi\alpha_n$ von der Gleichung $(z-\varphi\alpha_1)(z-\varphi\alpha_2)\ldots(z-\varphi\alpha_n) = 0$ ab. Setzt man nun $(z-\varphi\alpha_1)(z-\varphi\alpha_2)\ldots(z-\varphi\alpha_n) = Fz$, so soll Fz irreductibel oder die Potenz eines irreductibeln Ausdrucks sein.

Beweis. Setzt man voraus, Fz habe in Bezug auf den Modul p mehrere Divisoren $dz, d_1z, d_2z \ldots d_mz$, von denen jeder die Potenz eines eigenen irreductibeln Ausdrucks in Bezug auf den Modul p ist, so muss zunächst $F\varphi x$ algebraisch durch fx theilbar sein (§. 6. Einl.). Da aber $F\varphi x \equiv d\varphi x . d_1\varphi x \ldots d_m\varphi x$ (mod. p) ist, so muss einer der Factoren $d\varphi x$, $d_1\psi x \ldots d_m(\varphi x)$ durch fx theilbar sein (§. 4.). Zunächst ist nun zu zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen nicht zwei jener, etwa $d\varphi x$ und $d_1\varphi x$, durch fx in Bezug auf den Modul p theilbar sein können. Zu dem Ende bezeichne man die irreductiblen Ausdrücke, von welchen $d\varphi x$ und $d_1\varphi x$ in Bezug auf den Modul p als Potenzen angesehen werden können, durch $m\varphi x$ und $m_1\varphi x$, so müssten auch $m\varphi x$ und $m_1\varphi x$ in Bezug auf den Modul p durch fx aufgehen. Man würde also stets Gleichungen folgender Art aufstellen können: $m\varphi x = fx . Qx + pNx$, $m_1\varphi x = fx . Q_1x + pNx$, wo Qx, Nx, Q_1x und N_1x Ausdrücke von x bedeuten. Nimmt man nun an, der Grad von mz sei gleich oder höher als der von m_1z, so setze man $mz \equiv m_1z . q_1z + \alpha_2 m_2 z$ (mod. p), wo q_1z den algebraischen Quotienten bedeutet, den man erhält, wenn man mz durch m_1z dividirt, und $\alpha_2 m_2 z$ dem Ausdrucke des Divisions-Restes in der

Art congruent wird, dass α_2 eine Zahl und $m_2 z$ einen einfachen Ausdruck bedeutet. Auf ähnliche Weise setze man $m_1 z \equiv m_2 z q_2 z + \alpha_3 m_3 z \pmod{p}$, und fahre mit diesen Operations-Weise fort bis man endlich $m_\nu z \equiv m_{\nu+1} z q_{\nu+1} z + \alpha_{\nu+2} m_{\nu+2} z \pmod{p}$ erhält, wo $m_{\nu+2} z$ in Bezug auf z vom ersten Grade ist. Es muss sich in jedem Fall die Operation bis dahin fortsetzen lassen, weil sie nur dadurch unterbrochen werden könnte, dass irgend ein Rest, etwa $m_\nu z, \equiv 0 \pmod{p}$ würde. Dann würde man aber vermöge obiger Gleichungen leicht schliessen, dass $m_{\nu-2} z$ den Factor $m_{\nu-1} z$ haben müsse, und würde gleicherweise finden, dass alle Werthe, die dem $m_{\nu-1} z$ vorangehen, also auch $m_2 z$, $m_1 z$ und mz den Factor $m_{\nu-1} z$ haben müssten; was gegen die vorausgesetzte Irreductibilität der beiden Ausdrücke $m_1 z$ und mz streitet. Man kann mithin die Operation so lange fortsetzen bis $m_{\nu-2} z$ vom Grade 1 ist. Es ist nun zu zeigen, dass sämmtliche Ausdrücke $m_2 z, m_3 z, \ldots m_{\nu+1} z$, wenn man in ihnen φx statt z setzt, den Factor fx in Bezug auf den Modul p haben müssen. Diess ergiebt sich zunächst für $m_2 z$ aus der Congruenz $mz \equiv m_1 z q_1 z + \alpha_2 m_2 \pmod{p}$. Da nämlich mz und $m_1 z$, wenn man darin φx statt z, setzt, den Factor fx enthalten, so muss, da ${}_2 m_2 z \equiv mz - m_1 z q_1 z \pmod{p}$ ist, $m_2 z$, oder vielmehr $m_2 \varphi x$, auch den Factor fx enthalten. In gleicher Weise schliesst man fort auf $m_3 z$ durch die Congruenz $m_1 z \equiv m_2 z q_2 z + \alpha_3 m_3 z \pmod{p}$ etc., bis auf $m_{\nu+2} z$. Da aber $m_{\nu+2} z$ vom ersten Grade ist, so ist es von der Form $z + A_1$, wo A_1 eine ganze Zahl bedeutet, und man erhält, da fx in Bezug auf den Modul p ein Factor von $z + A_1$ ist, $z + A_1 \equiv fx\, Ux \pmod{p}$, wo Ux einen Ausdruck von x bedeutet. Setzt man für z seinen Ausdruck φx, so hat man $\varphi x + A_1 \equiv fx \,.\, Ux \pmod{p}$ und mithin $\varphi x = -A_1 + fx \,.\, Ux + pSx$, wo Sx ebenfalls einen Ausdruck von x bedeutet. Ist nun α eine der Wurzeln von fx, so hat man offenbar $\varphi \alpha = -A_1 + pS\alpha$, und hieraus leitet man leicht die Congruenz $(z - \varphi\alpha_1)\,(-\varphi\alpha_2)\,\ldots\,(z - \varphi\alpha_n) \equiv (z + A_1)_n \pmod{p}$ ab, wonach offenbar in Fz nicht zwei verschiedene irreductible Ausdrücke von z als Factoren nach dem Modul p vorkommen können. Setzt man also unter obiger Voraussetzung $F\varphi x \equiv d\varphi x \,.\, d_1 \varphi x \;\ldots\; d_m \varphi x \pmod{p}$, so kann, wenn $d\varphi x$ den Divisor fx hat, keiner der übrigen Factoren diesen Ausdruck zum Divisor haben. Schreibt man nun obige Congruenz als Gleichung, so erhält man $Fz = dz\, d_2 z \ldots d_n z + pRz$, wo Rz einen Ausdruck von z bedeutet. Setzt man irgend eine der Wurzeln von Fz gleich γ_1 und bezeichnet das Product $d_1 z d_2 z \ldots d_m z$ durch Dz, so enthält man $d\gamma_1 D\gamma_1 + pR\gamma_1 = 0$ und mithin

$$d\gamma_1 = -p\frac{R\gamma_1}{D\gamma_1} = -p\frac{R\gamma_1 D\gamma_2 D\gamma_3 \dots D\gamma_n}{D\gamma_1 D\gamma_2 D\gamma_3 \dots D\gamma_n} = -p\frac{R\gamma_1 D\gamma_2 D\gamma_3 \dots D\gamma_n}{N(D_F)}.$$

Die Norm von Dz in Bezug auf Fz ist aber dieselbe wie die Norm von $D\varphi x$ in Bezug auf fx. Es ist nämlich $N(D_F) = D\gamma_1 D\gamma_2 \dots D\gamma_n$, und die Norm von $D\varphi x$ in Bezug auf fx ist $D\varphi\alpha_1\, D\varphi\alpha_2 \dots D\varphi\alpha_n$. Da aber die Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ mit den Werthen $\varphi\alpha_1, \varphi\alpha_2, \dots \varphi\alpha_n$ übereinstimmen, so hat man $D\gamma_1 D\gamma_2 \dots D\gamma_n = D\varphi\alpha_1 D\varphi_2 \dots D\varphi\alpha_n$ und mithin $N(D_F) = N(D_f)$, wo natürlich in letzterem Ausdruck D als ein Ausdruck von x anzusehen ist. Da nun $D\varphi x$ nicht den Factor fx in Bezug auf den Modul p haben kann, so kann auch $N(D_f)$ oder $N(D_F)$ nicht $\equiv 0$ (mod. p) sein (§. 11.). Bezeichnet man also die Zahl $N(D_F)$ durch z, so erhält man $zd\gamma_1 = -pR\gamma_1 D\gamma_2 D\gamma_3 \dots D\gamma_n$. Da aber $D\gamma_2 D\gamma_3 \dots D\gamma_n$ ein symmetrischer Ausdruck von $\gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_n$ ist, so lässt es sich (§. 2. Einl.) als Ausdruck von γ_1 ansehen; wonach man auch $R\gamma_1 D\gamma_2 D\gamma_3 \dots D\gamma_n$ als einen Ausdruck von γ_1 betrachten kann. Nennt man diesen $Q\gamma_1$, so erhält man $zd\gamma_1 = pQ\gamma_1$

und auf gleiche Weise $zd\gamma_2 = pQ\gamma_2$

$$zd\gamma_3 = pQ\gamma_3$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$zd\gamma_n = pQ\gamma_n.$$

Da nun $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ die Wurzeln von $Fz \equiv 0$ sind, so folgt (§. 7.), dass Fz einer Potenz desjenigen Ausdrucks nach dem Modul p congruent ist, von dem dz selbst in Bezug auf p als Potenz zu betrachten ist. Es kann mithin ausser dz keinen Factor von Fz in Bezug auf den Modul p geben, und Fz selbst ist der Potenz eines irreductibeln Ausdrucks nach dem Modul p congruent; was zu beweisen war.

Zusatz. Ist der Grad von fx gleich n, der von φx aber kleiner als n, so kann Fz nicht $\equiv (z-A_1)^n$ (mod. p) werden, wenn A_1 eine ganze Zahl bedeutet.

Wäre nämlich $Fz \equiv (z-A_1)^n$ (mod. p), so könnte man eine Gleichung von der Form $Fz = (z-A_1)^n - pRz$ aufstellen, wo Rz einen Ausdruck von z bedeutet. Da nun die Wurzeln von Fz, $\varphi\alpha_1, \varphi\alpha_2, \dots \varphi\alpha_n$ sind, so erhält man die Gleichungen

$$(\varphi\alpha_1 - A_1)^n = pR\alpha_1$$

$$(\varphi\alpha_2 - A_1)^n = pR\alpha_2$$

$$(\varphi\alpha_3 - A_1)^n = pR\alpha_3$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$(\varphi\alpha_n - A_1) = pR\alpha_n.$$

Nun findet sich durch Multiplication dieser Gleichungen sehr leicht, dass $\{(\varphi\alpha_1 - A_1)(\varphi\alpha_2 - A_1)\ldots(\varphi\alpha_n - A_1)\}^n = p^n R\alpha R\alpha_2 \ldots R\alpha_n$ sei. Da auf beiden Seiten der Gleichung symmetrische Functionen der Wurzeln von fx stehen, so sind dieselben ganze Zahlen, und mithin ist gewiss

$$\{(\varphi\alpha_1 - A_1)(\varphi\alpha_2 - A_1)\ldots(\varphi\alpha_n - A_1)\}^n \equiv 0 \pmod{p},$$

und daher auch

$$(\varphi\alpha_1 - A_1)(\varphi\alpha_2 - A_1)\ldots(\varphi\alpha_n - A_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Setzt man nun $\varphi x - A_1 = \psi x$, so ist auch ψx, wie φx, von einem geringeren Grade als fx, mithin kann $N\psi f$ oder $(\varphi\alpha_1 - A_1)(\varphi\alpha_2 - A_1)\varphi\alpha_3 - A_1)\ldots(\varphi\alpha_n - A_1)$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ sein (§. 10.), welches doch Statt finden müsste, wenn $Fz \equiv (z - A_1)^n \pmod{p}$ wäre.

§. 13.

Lehrsatz. Zwei einfache Ausdrücke von x, von welchen die Wurzeln des einen die $p$ten Potenzen der Wurzeln des andern sind, sind nach dem Modul p congruent.

Zum Beweise bemerke man, dass

1) $(z-1)^p \equiv z^p - 1 \pmod{p}$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der durch den binomischen Lehrsatz bestimmten Form der Coefficienten von $(z-1)^p$. Es werden mithin die symmetrischen Functionen der Wurzeln von $z^p - 1$ und von $(z-1)^p$ nach dem Modul p congruent sein. Da die Wurzeln von $(z-1)^p$ sämmtlich gleich 1 sind, so kann man statt jeder Wurzel von $z^p - 1$, insofern es sich um congruente Ausdrücke der symmetrischen Functionen der Wurzeln dieses Ausdrucks handelt, 1 setzen.

2) Ist $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a$ irgend ein einfacher Ausdruck von x, und bezeichnen $\alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}$ die Wurzeln von $z^p - 1$, so wird (Vergl. §. 3 Pg. 234 des 19. Bandes dieses Journals) der Ausdruck von x, dessen Wurzeln die $p$ten Potenzen der Wurzeln des vorhergehenden sind, gefunden, wenn man das Product $(z^n + a_1 z^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \ldots + a_n)(z^n + a_1\alpha z^{n-1} + a_2\alpha^2 z^{n-2} + \ldots a^n\alpha_n)(z^n + a_1\alpha^2 z^{n-1} + a_2\alpha^4 z^{n-2} + \ldots + a_n\alpha^{2n})\ldots\ldots(z^n + a_1\alpha^{p-1}z^{n-1} + a_2\alpha^{2(p-1)}z^{n-2} + \ldots a_n\alpha^{n(p-1)})$ entwickelt und x statt z^p setzt. Setzt man nun hier nach (No. 1.) statt der Werthe $\alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}$ nur die Werthe 1, so geht jenes Product über in $(z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots a_n)^p$. Es ist aber $(z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)^p \equiv z^{np} + a_1^p z^{(n-1)p} + \ldots + a_n^p \pmod{p}$. Dies folgt aus der durch den polynomischen Lehrsatz bestimmten Form der Coefficienten jener $p$ten Potenz. Setzt man nun x statt z^p, so wird der gesuchte

Ausdruck von x, dessen Wurzeln die p^{ten} Potenzen der Wurzeln von $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ sind, dem Ausdrucke $x^n + a_1^p x^{n-1} + a_2^p x^{n-2} + \ldots + a_n^p$ nach dem Modul p congruent werden. Oder der Ausdruck, welcher die p^{ten} Potenzen der Wurzeln eines gegebenen als Wurzeln enthält, ist nach dem Modul p einem Ausdrucke congruent, dessen Coefficienten die p^{ten} Potenzen der entsprechenden Coefficienten des gegebenen sind.

3) Wendet man dieses Resultat auf den Ausdruck $(x-1)^a$ an, in welchem a eine ganze Zahl bedeutet, so findet man, da $(x-1)^a = x^a - a x^{a-1} + \text{etc.}$, dass der gesuchte Ausdruck $x^a - a^p x^{a-1} + \text{etc.}$ congruent sein werde. Da aber die Wurzeln von $(x-1)_a$ alle der Einheit gleich sind, so sind ihre p^{ten} Potenzen ebenfalls der Einheit gleich, und der gesuchte Ausdruck wird daher $(x-1)^a = x^a - ax^{a-1} + \text{etc.}$ sein. Man erhält folglich $x^a - a^p x^{a-1} = \text{etc.}$ $\equiv x^a - ax^{a-1}$ etc. (mod. p) oder $a^p \equiv a$ (mod p) etc., und daher $a(a^{p-1}-1) \equiv 0$ (mod. p), mithin, wenn a nicht $\equiv 0$ (mod. p) ist, $a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p), d. h. also: jede Zahl, die nicht $\equiv 0$ (mod p) ist, giebt zur Potenz $p-1$ erhoben und durch p dividirt den Rest 1. Da $x^{p-1}-1$ für $x = a$ congruent 0 wird, so wird auch die Norm von $x^{p-1}-1$ in Bezug auf $x-a$ congruent 0, und $x-a$ muss ein Factor von $x^{p-1}-1$ sein (§. 11.). Setzt man für a nach der Reihe die Werthe $1, 2, \ldots p-1$, so findet man, dass $x^{p-1}-1$ die Factoren $x-1, x-2, \ldots x-(p-1)$ in Bezug auf den Modul p enthält. Da diese Factoren sämmtlich irreductibel sind, so folgt leicht, dass stets $x^{p-1}-1 \equiv (x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(p-1))$ (mod. p) ist.*)

Durch Anwendung des in (No. 3.) enthaltenen Satzes auf das in (No. 2.) gewonnene Resultat, geht nun der ausgesprochene Satz hervor. Der gesuchte Ausdruck war nämlich congruent $x^n + a^p x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n^p$ und da nach (No. 2.) $a_1^p \equiv a_1$ (mod. p) etc. ist, so ist offenbar $x^n + a_1^p x^{n-1} + \ldots a_n^p \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ (mod. p).

§. 14.

Erklärungen und Lehrsätze. 1) Zwei Ausdrücke derselben Wurzel a, eines irreductiblen einfachen Ausdrucks fx sollen fortan nach dem Modul (p, a) congruent heissen, wenn sich der eine von ihnen als eine Summe des andern und eines $p$fachen Ausdrucks dieser Wurzel darstellen lässt.

---

*) Anmerkung. Der Satz, dass $a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p) gebührt *Fermat*, und trägt von ihm den Namen; der Satz dass $x^{p-1}-1 \equiv (x-1)\ (x-2)\ldots x-(p-1)$ (mod. p) gebührt *Lagrange*.

Ist also $\varphi\alpha = \psi\alpha + pR\alpha$, wo $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ und $R\alpha$ Ausdrücke von α bedeuten, so ist $\varphi\alpha$ congruent $\psi\alpha$ in Bezug auf den Modul (p,α), und es wird geschrieben werden $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p,α).

2) Ist $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p,α), so ist fx in Bezug auf den Modul p ein Divisor von $\varphi x - \psi x$, und umgekehrt.

Beweis. Da fx in Bezug auf den Modul p irreductibel ist, so ist es gewiss in algebraischer Beziehung irreductibel, und da $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p,α) ist, so muss $\varphi\alpha - \psi\alpha - pR\alpha = 0$ sein. $\varphi x - \psi x - pRx$ hat also mit fx die Wurzel α gemeinschaftlich, und muss folglich durch fx algebraisch dividirbar sein (§. 3. Einl.). Man kann mithin $\varphi x - \psi x - pRx = fx . Qx$ setzen, wo Qx einen Ausdruck von x bedeutet. Es ist mithin $\varphi x - \psi x \equiv fx . Qx$ (mod. p) und fx ein Divisor von $\varphi x - \psi x$ in Bezug auf den Modul p. Die Umkehrung ergiebt sich leicht.

3) Bezeichnet α_1 eine andere Wurzel von fx als α, so hat man, wenn $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p,α) ist, auch $\varphi\alpha_1 \equiv \psi\alpha_1$ (mod. p,α_1).

Beweis. Wenn $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p,α), so ist $\varphi x - \psi x - pRx = fx . Qx$, und mithin, da $f\alpha_1 = 0$ ist, $\varphi\alpha_1 - \psi\alpha_1 - pR\alpha_1 = 0$, folglich $\varphi\alpha_1 = \psi\alpha_1 + pR\alpha_1$ und $\varphi\alpha_1 \equiv \psi\alpha_1$ (mod, p,α_1).

4) Es finden sich nun leicht folgende Sätze. Die Summe, Differenz und das Product zweier Ausdrücke von α, die zweien andern Ausdrücken, nach dem Modul (p,α) einzeln verglichen, congruent sind, ist congruent der Summe Differenz, oder dem Product der entsprechenden Ausdrücke nach dem Modul (p,α).

5) Wenn das Product zweier Ausdrücke von α congruent 0 nach dem Modul (p,α) ist, so ist einer von jenen Ausdrücken selbst nach diesem Modul congruent 0.

Beweis. Gesetzt die beiden Ausdrücke wären $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$, und also $\varphi\alpha . \psi\alpha \equiv 0$ (mod. p,α), so muss (*No.* 3.) $\varphi x . \psi x - pRx = fx . Qx$ sein, wo Rx und Qx wie oben Ausdrücke von x bedeuten. Man erhält mithin $\varphi x . \psi x \equiv fx . Qx$ (mod. p), und da fx ein irreductibler Ausdruck ist, so muss er (§. 5.) entweder ein Factor von φx, oder von ψx in Bezug auf den Modul p sein. Für den ersten Fall findet man aber leicht $\varphi\alpha \equiv 0$ (mod. p,α) und für den andern $\psi\alpha \equiv 0$ (mod. p,α).

6) Ist $\varphi\alpha . \psi\alpha \equiv \varphi_1\alpha . \psi_1\alpha$ (mod. p,α) und $\varphi\alpha \equiv \varphi_1\alpha$ (mod. p,α), aber nicht $\equiv 0$ (mod. p,α), so ist auch $\psi\alpha \equiv \psi_1\alpha$.

Beweis. Nach (*No.* 5.) ist $\varphi\alpha . \psi\alpha \equiv \varphi_1\alpha . \psi\alpha$ (mod. p,α). Man

hat daher auch $\varphi_1\alpha\,.\,\psi\alpha \equiv \varphi_1\alpha\,.\,\varphi_1\alpha$ (mod. p,α) oder $\varphi_1\alpha\,(\psi\alpha - \psi_1\alpha) \equiv 0$ (mod. p,α). Da aber $\varphi_1\alpha$ nicht $\equiv 0$ (mod. p,α) ist, so muss (*No.* 5.) $\psi\alpha - \psi_1\alpha \equiv 0$ (mod. p,α) oder $\psi\alpha \equiv \psi_1\alpha$ (mod. p,α) sein.

7) Eine Function von x, deren Coefficienten Ausdrücke von α sind, wird als ein Ausdruck von x nach dem Modul (p,α) betrachtet werden. Zwei Ausdrücke von x werden nach dem Modul (p,α) congruent gesetzt werden, wenn die Coefficienten der gleichen Potenzen von x in beiden nach dem Modul (p,α) congruent sind.

8. Ein Ausdruck von α, der sich weder 0 noch einer ganzen Zahl nach dem Modul (p,α) congruent setzen lässt, soll noch insbesondere ein zum Modul (p,α) gehöriger Ausdruck genannt werden. Wohingegen diejenigen Ausdrücke von α, welche sich 0 oder einer ganzen Zahl nach dem Modul (p,α) congruent setzen lassen, zum Modul p gehörige Ausdrücke genannt werden sollen. Ebenso soll eine ganze Function von x, deren Coefficienten sämmtlich oder zum Theil Ausdrücke von α sind, die zum Modul (p,α) gehören, ein Ausdruck von x, der zu dem Modul (p,α) gehört, heissen. Gehören aber die Coefficienten sämmtlich zum Modul p, so soll sie ein zu dem Modul p gehöriger Ausdruck von x heissen.

§. 15.

Lehrsatz. Die p^{te} Potenz irgend eines zum Modul (p,α) gehörigen Ausdrucks von x kann nicht dem Ausdruck selbst, nach dem Modul (p,α) congruent sein, oder wenn $\varphi\alpha$ einen zum Modul p,α gehörigen Ausdruck darstellt, so kann nicht $(\varphi\alpha)^p \equiv \varphi\alpha$ (mod. p,α) sein.

Beweis. Wenn $(\varphi\alpha)^p \equiv \varphi\alpha$ (mod. p,α) wäre, so wäre auch (§. 14. *No.* 6.) $(\varphi\alpha)^{p-1} \equiv 1$ oder $(\varphi\alpha)^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p,α). Nach (§. 13. *No.* 3.) ist aber $(\varphi\alpha^{p-1} - 1) \equiv (\varphi\alpha - 1)(\varphi\alpha - 2) \ldots (\varphi\alpha - (p-1))$ (mod. p,α): sollte also $(\varphi\alpha^{p-1} - 1) \equiv 0$ (mod. p,α) werden, so müsste einer der Factoren $\varphi\alpha - 1$, $\varphi\alpha - 2, \ldots\ldots, \varphi\alpha - (p-1) \equiv 0$ (mod. p,α) werden (§. 14. *No.* 5.). Dies geht aber nicht an, weil $\varphi\alpha$ ein zum Modul (p,α) gehöriger Ausdruck ist.

§. 16.

Lehrsatz. Der Ausdruck von x, welcher die p^{ten} Potenzen der Wurzeln eines Ausdrucks, dessen erster Coefficient 1 ist und der zu dem Modul $(p.\alpha)$ gehört, als Wurzeln in sich schliesst, kann nicht mit jenem Ausdrucke nach dem Modul (p,α) congruent sein.

Beweis. Bedeutet Fx einen Ausdruck von x, dessen erster Coefficient 1 ist, und in welchem sonst Coefficienten vorkommen, die zum Modul (p,α) gehören, so soll der Ausdruck, dessen Wurzeln die $p$ten Potenzen der Wurzeln von Fx sind, nicht mit Fx nach dem Modul (p,α) congruent sein können. Es folgt nämlich aus (§. 13. *No.* 2.), dass dieser zweite Ausdruck aus Fx hervorgehen werde, wenn man statt der Coefficienten von Fx die $p$ten Potenzen derselben setzt. Da aber die $p$ten Potenzen von denjenigen Coefficienten, die zum Modul (p,α) gehören, sich nicht selbst nach diesem Modul congruent sind (§. 15.), so folgt der Satz.

§. 17.

Lehrsatz. $\alpha^{p^m}-\alpha$ kann nicht nach dem Modul (p,α) congruent 0 sein, wenn der Grad von fx, von welchem Ausdruck α eine Wurzel ist, die Zahl m überschreitet.

Beweis. Gesetzt es sei $\alpha^{p^m}-\alpha\equiv 0$ (mod. p,α), so wäre auch $\alpha^{p^m}\equiv\alpha$ (mod. p,α) und daher auch

$$(x-\alpha)\,(x-\alpha^p)\,(x-\alpha^{p^2})\ldots\ldots(x-\alpha^{p^{m-1}})\equiv(x-\alpha^p)\,(x-\alpha^{p^2})\ldots\ldots(x-\alpha^{p^{m-1}})$$
$$(x-\alpha^{p^m})\ (\text{mod. } p,\alpha).$$

Der Ausdruck rechts enthält aber offenbar die $p$ten Potenzen der Wurzeln, des ersten als Wurzeln: er kann ihm mithin nur dann congruent werden, wenn die Coefficienten von $(x-\alpha)\,(x-\alpha^p)\ldots(x-\alpha^{p^{m-1}})$ zum Modul p gehören (§. 16.); alsdann muss aber jeder Coefficient dieses Ausdrucks von der Form $z+pM\alpha$ sein, wo $M\alpha$ einen Ausdruck von α bedeutet. Dies vorausgesetzt, wird $(x-\alpha)\,(x-\alpha^p)\ldots\ldots(x-\alpha^{p^{m-1}})$ offenbar von der Form $x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A^m+pF(x,\alpha)$ sein, wo $A_1, A_2, \ldots. A_m$ ganze Zahlen sind und $F(x,\alpha)$ einen Ausdruck von x nach dem Modul (p,α) bedeutet. Bedenkt man aber, dass die bisherigen Schlussfolgen sich in derselben Weise auf jede der Wurzeln von fx anwenden lassen, so erhält man, indem man die sämmtlichen Wurzeln von fx durch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_{n-1}$ bezeichnet, folgende Gleichungen:

$$(x-\alpha)\,(x-\alpha^p)\,(x-\alpha^{p^2})\ldots(x-\alpha^{p^{m-1}})=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m+pF(x,\alpha)$$
$$(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_1^p)\,(x-\alpha_1^{p^2})\ldots(x-\alpha_1^{p^{m-1}})=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m+pF(x,\alpha_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x-\alpha_{n-1})\,(x-\alpha_{n-1}^p)(x-\alpha_{n-1}^{p^2})\ldots(x-\alpha_{n-1}^{p^{m-1}})=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A^m+pF(x,\alpha^{n-1}).$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichungen in einander, so wird die rechte Seite offenbar $\equiv (x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m)^p$ (mod. p). die linke wird aber den Factor $(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots.(x-\alpha_{n-1})$ oder fx haben; woraus zu schliessen ist, dass $(x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m)^p$ ebenfalls den irreductibeln Ausdruck fx als Factor nach dem Modul p haben müsste. Dies geht aber nicht an, weil der Grad von fx der Voraussetzung nach grösser als m ist.

§. 18.

Hauptsatz. Wenn fx ein einfacher irreductibler Ausdruck nach dem Modul p und α eine Wurzel desselben ist, so ist $fx \equiv (x-\alpha)(x-\alpha^p)(x-\alpha^{p^2})\ldots.(x-\alpha^{p^{n-1}})$ (mod. p,α) und $\alpha^{p^n-1} \equiv 1$ (mod. p,α). *)

Beweis. Gesetzt $\alpha, \alpha_1, \ldots. \alpha_{n-1}$ seien die Wurzeln von fx, so folgt (§. 13.), dass jeder Ausdruck, dessen Wurzeln die $(p^m)^{ten}$ Potenzen jener sind (wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet), mit fx nach dem Modul p congruent sein werde. Ein solcher Ausdruck wird daher von der Form $fx + pF_m x$ sein, wo $F_m x$ einen Ausdruck von x bedeutet. Setzt man daher in diesen Ausdruck statt x eine Wurzel desselben, also α^{p^m}, so erhält man $f\alpha^{p^m} + pF_m \alpha p^m = 0$ oder $f\alpha^{p^m} \equiv$ (mod. p,α). Da α eine Wurzel von fx ist, so ist $x-\alpha$ ein algebraischer Divisor von fx und man kann daher $fx = (x-\alpha)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots. + b_{n-1})$ setzen, wo $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ Ausdrücke von α bedeuten. Setzt man nun in diese Gleichnng statt x den Ausdruck α^p, so erhält man $f\alpha^p = (\alpha^p - \alpha)(\alpha^{p(n-1)} + b_1 \alpha^{p(n-2)} + b_2 \alpha^{p(n-3)} + \ldots.. + b_{n-1})$. Da nun aber $f\alpha^p \equiv 0$ (mod. p,α) ist, und $\alpha_p - \alpha$ nicht $\equiv 0$ (mod. p,α) sein kann, wenn $n > 1$ ist (§. 17.), so muss $\alpha^{p(n-1)} + b_1 \alpha^{p(n-2)} + \ldots\ldots b_{n-1} \equiv 0$ (mod. p,α) sein (§. 14. *No.* 4.). Es ist mithin auch $x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots. + b_{n-1} - (\alpha^{p(n-1)} + b_1 \alpha^{p(n-2)} + b_2 \alpha^{p(n-3)} + \ldots + b_{n-1})$ oder $x^{n-1} - \alpha^{p(n-1)} + b_1(x^{n-2} - \alpha^{p(n-2)}) + b_2(x^{n-3} - \alpha^{p(n-3)}) \ldots\ldots. b_{n-2}(x-\alpha^p) \equiv x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots. + b_{n-1}$ (mod. p,α). Offenbar hat aber die linke Seite der Congruenz den Factor $x-\alpha^p$ und man kann sie daher durch $(x-\alpha^p)(x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \ldots + c_{n-2})$ darstellen, wo $c_1, c_2, \ldots. c_{n-2}$ Ausdrücke von

---

*) Hieraus geht hervor, dass, wenn fx ein einfacher, nach dem Modul p irreductibler Ausdruck ist, und man bildet irgend eine symmetrische ganze Function von $x, x^p, x^{p^{n-1}}$ und dividirt sie durch fx, der Divisions-Rest stets einer Zahl gleich sein werde, die man enthält, wenn man statt $x, x^p, \ldots x^{p^{n-1}}$ in der symmetrischen Function die Wurzeln von fx setzt, plus einem $p$fachen Ausdruck von x; und dass ferner x^{p^n-1} 1 durch fx dividirt einen $p$fachen Ausdruck von x zum Rest geben muss.

Diese Sätze drücken zugleich die im Text gegebenen ohne den Gebrauch des Moduls p,α aus.

α bedeuten. Man erhält daher $fx \equiv (x-\alpha)\,(x-\alpha^p)\; x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \ldots + c^{n-2})$ (mod. p,α), und mithin auch $fx^{p^2} \equiv (\alpha^{p^2}-\alpha)\,(\alpha^{p^2}-\alpha^p)\,(\alpha^{p^2(n-2)} + c_1\alpha^{p^2(n-3)} + c_2\alpha^{p^2} + \ldots + c_{n-2})\;\alpha$ (mod. p,α). Es ist aber $\alpha^{p^2}-\alpha^p \equiv (\alpha^p-\alpha)^p$ (mod. p,α) *), und da (§. 17.) $\alpha^p - \alpha$ nicht $\equiv 0$ (mod. p,α) sein kann, so kann auch nicht $(\alpha^p-\alpha)^p \equiv 0$ (mod. p,α) sein (§. 14. *No.* 5.). Da nun $f\alpha^{p^2} \equiv 0$ ist und, insofern $n > 2$, $(\alpha^{p^2}-\alpha)\,(\alpha^{p^2}-\alpha^p)$ nicht $\equiv 0$ (mod. p,α) sein kann (§. 14 *No.* 5. §. 17.), so muss $\alpha^{p^2(n-2)} + c_1\alpha^{p^2(n-3)} + \ldots\ldots\ldots + c_{n-2} \equiv 0$ (mod. p,α) sein. Hieraus folgt, wie vorher, dass $x^{n-2} + c_1x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}$ den Factor $x - \alpha^{p^2}$ haben muss, und man erhält $fx \equiv (x-\alpha)\;(x-\alpha^p)\;(x-\alpha^{p^2})\;(x^{n-3} + d_1x^{n-4} + d_2\,x^{n-5} + \ldots\ldots + d_{n-3})$ (mod. p,α). Durch fortgesetzte Anwendung der angeführten Sätze erhält man zuletzt $fx \equiv (x-\alpha)\;(x-\alpha^p)\;(x-\alpha^{p^2})\ldots\ldots(x-\alpha^{p^{n-1}})$ (mod. p,α). Da nun $f\alpha^{p^n} \equiv 0$ (mod. p,α) ist, so muss auch $(\alpha^{p^n}-\alpha)\,(\alpha^{p^n}-\alpha^p)\,(\alpha^{p^n}-\alpha p^2)\ldots\ldots(\alpha^{p^n}-\alpha^{p^{n-1}}) \equiv 0$ (mod. p,α) sein. Da aber $(\alpha^{p^n}-\alpha^p)\,(\alpha^{p^n}-\alpha^{p^2})\ldots\ldots(\alpha^{p^n}-\alpha^{p^{n-1}}) \equiv (\alpha^{p^{n-1}}-\alpha)^p\,(\alpha^{p^{n-2}}-\alpha)^{p^2}\ldots\ldots(\alpha^p-\alpha)^{p^{n-1}}$ (mod. p,α) ist (vergl. die Anmerkung), und nach (§. 17.) keiner der Ausdrücke $\alpha^{p^{n-1}}-\alpha$, $\alpha^{p^{n-2}}-\alpha$, ... $\alpha^p-\alpha$ congruent 0 (mod. p,α) werden kann, so muss $\alpha^{p^n}-\alpha \equiv 0$ (mod. p,α) sein. Da aber $\alpha^{p^n}-\alpha \equiv \alpha(\alpha^{p^n-1}-1)$ (mod. p,α) ist, und α nicht $\equiv 0$ sein kann, wenn fx nicht $= x$ ist, so ist $\alpha^{p^n}-1 \equiv$ (mod. p,α).

Zusatz. Da $\alpha^{p^n-1}-1 \equiv$ (mod. p,α) ist, so folgt, dass fx in Bezug auf den Modul p ein Divisor von $x^{p^n}-1$ ist (§. 14. *No.* 2.) Hieraus folgt, dass die Congruenz $x^k - 1 \equiv 0$ (mod. p) den allgemeinsten Character in Bezug auf ihre Wurzeln in sich trägt, wenn man dem k, wie dem p, alle hier möglichen Werthe beilegt.

§. 19.

Lehrsatz. Die (p^n-1)te Potenz jedes Ausdrucks von α ist congruent 1 nach dem Modul (p,α), wenn der Ausdruck nicht $\equiv 0$ (mod. p,α) ist.

---

*) Entwickelt man nämlich $(\alpha^p-\alpha)^p$ nach dem binomischen Satze, so werden alle Glieder, ausser dem ersten und letzten, Coefficienten haben, die $\equiv 0$ (mod. p) sind. Man erhält demnach $(\alpha^p-\alpha)^p \equiv \alpha^{p^2}-\alpha^p$ (mod. p,α). Hieraus folgt $(\alpha^{p^2}-\alpha^p)^p \equiv \alpha^{p^3}-\alpha^{p^2}$ (mod. p,α) und ferner zufolge des binomischen Satzes $(\alpha^{p^2}-\alpha^p)^p \equiv \alpha^{p^3}-\alpha^{p^2}$ (mod. p,α) und daher $(\alpha^p-\alpha)^{p^2} \equiv \alpha^{p^3}-\alpha^{p^2}$ (mod. p,α) und allgemein $(\alpha^p-\alpha)^{p^{m-2}} \equiv \alpha^{p^m}-\alpha^{p^{m-1}}$ (mod. p,α).



Beweis. Es sei $\varphi\alpha$ der Ausdruck von α und $= a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots + a_k$. Nun kann leicht, entweder durch den polymonischen Satz, oder durch fortgesetzte Anwendung des binomischen, gezeigt werden, dass $(a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots + a_k)^p \equiv a_0^p\alpha^{k\cdot p} + a_1\alpha^{(k-1)p} + \ldots\ldots a_k^p$ (mod. p,α) ist. Da aber $a_0, a_1, \ldots\ldots a_k$ ganze Zahlen sind, so ist $a_0^p \equiv a_0$ (mod. p), $a_1^p \equiv a_1$ (mod. p) etc. (§. 13. №. 3). Man erhält folglich $(a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots a_k)^p \equiv a_0\alpha^{kp} + a_1\alpha^{k-1\cdot p} + \ldots\ldots + a_k$ (mod. p,α) und mithin $(a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots a_k)^{p^2} \equiv (a_0\alpha^{kp} + a_1\alpha^{(k-1)p} + \ldots\ldots + a_k)^p$ (mod. p,α) und den letzten Ausdruck durch ähnliche Schlussfolgen $\equiv a_0\alpha^{kp^2} + a_1\alpha^{(k-1)p^2} + \ldots\ldots + a_k$ (mod. p,α), mithin $(a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots + a_k)^{p^2} \equiv a_0\alpha^{kp^2} + a_1\alpha^{(k-1)p^2} + \ldots + a_k$ (mod. p,α). Durch die fortgesetzte Schlussfolge derselben Art erhält man $(a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots + a_k)^{p^n} \equiv a_0\alpha^{kp^n} + a_1\alpha^{(k-1)p^n} + \ldots\ldots + a_k$ (mod. p,α). Da nun aber $\alpha^{p^n} \equiv \alpha$ (mod. p,α) ist (§. 18.), so findet sich $(a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots + a_k)^{p^n} \equiv a_0\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots\ldots + a_k$ (mod. p,α) oder $(\varphi\alpha)^{p^n} \equiv \varphi\alpha$ (mod. p,α), und daher durch Division, wenn $(\varphi\alpha)$ nicht $\equiv 0$ (mod. p,α) ist, $(\varphi\alpha)^{p^n-1} \equiv 1$ (mod. p,α); was zu beweisen war.

Zusatz. Ist φx nicht $\equiv 0$ (mod. p,α), und bedeutet $\psi\alpha$ irgend einen Ausdruck von α, so kann man stets einen andern Ausdruck $\varphi_1\alpha$ von α so bestimmen, dass $\varphi\alpha.\varphi_1\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p,α) wird. Man hat zu dem Ende $\varphi_1\alpha$ nur $\equiv (\varphi\alpha)^{p^n-1}.\psi\alpha$ (mod. p,α) zu setzen. Zwei verschiedene Ausdrücke von α, die beide jener Congruenz genügen, müssen nach dem Modul (p,α) congruent sein. Denn wäre $\psi\alpha \equiv \varphi\alpha.\varphi_1\alpha \equiv \varphi\alpha.\varphi_2\alpha$ (mod. p,α), so folgt durch Division (§. 14. №. 6.) $\varphi_1\alpha \equiv \varphi_2\alpha$ (mod. p,α).

§. 20.

Erklärungen und Lehrsätze. 1) Ein Ausdruck von α, dessen Grad geringer als der von fx ist, und dessen Coefficienten sämmtlich kleiner als p sind, soll ein kleinster Rest in Bezug auf den Modul (p,α) genannt werden.

2) Jeder Ausdruck von α ist einem kleinsten Reste nach dem Modul (p,α) congruent.

Beweis Man nenne den Ausdruck $\varphi\alpha$, und setze $\varphi x = fx.Qx + Rx$, wo Qx den Quotienten angiebt, den man erhält, wenn man φx durch fx algebraisch dividirt, und Rx den Rest: so wird Rx offenbar von einem geringeren Grade als fx sein, und man erhält zunächst $\varphi\alpha \equiv R\alpha$ (mod. p,α).

Nun setze man statt der Coefficienten von $R\alpha$ die Reste, welche sich finden, wenn man dieselben durch p dividirt, und nenne den daraus hervorgehenden Ausdruck $R_1\alpha$, so wird $\varphi\alpha \equiv R_1\alpha$ (mod. p, α) sein und $R_1\alpha$ die verlangte Form haben.

3) Ist n der Grad von fx, so wird die Anzahl sämmtlicher verschiedener kleinster Reste nach dem Modul (p,α), wenn man 0 ausschliesst, durch $p^p - 1$ ausgedrückt.

Beweis. Die allgemeine Form eines kleinsten Restes ist $a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + a_2\alpha^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-1}$. Dieselbe schliesst n Glieder in sich, und jeder der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ muss der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots\ldots p-1$ entnommen sein. Offenbar kann man nun nach bekannten Sätzen aus der Combinations-Lehre p^n solche Ausdrücke bilden. Da aber unter diesen einer ist, dessen sämmtliche Coefficienten 0 sind, und der mithin selbst 0 ist, so bleiben, mit Ausschluss von diesem, $p^n - 1$ verschiedene kleinste Reste.

4) Zwei Ausdrücke von a, welche verschiedenen kleinsten Resten nach dem Modul (p,a) congruent sind, sollen überhaupt verschiedene Ausdrücke nach dem Modul (p,α), oder schlechtweg verschiedene Ausdrücke heissen.

5) Ausdrücke von x nach dem Modul (p,α) sollen einfache heissen, wenn der Coefficient ihrer höchsten Potenz gleich 1 ist, vielfache hingegen, wenn er nicht 1 ist.

6) Jeder vielfache Ausdruck von x ist einem einfachen Ausdruck desselben Grades, multiplicirt in den Coefficienten der höchsten Potenz von x, nach dem Modul $(p.\alpha)$ congruent.

Beweis wie in §. 2., mit Hinzuziehung des Zusatzes zu (§. 19.).

7) Ist es möglich ein Product zweier Ausdrücke von x aufzustellen (von denen aber keiner einem niedrigeren Grade als dem ersten angehört), welches einem gegebenen Ausdrucke nach dem Modul (p,α) congruent wird, so soll jeder der Factoren ein Factor oder ein Divisor des gegebenen Ausdrucks in Bezug auf den Modul (p,α), oder, wenn keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, bloss ein Factor oder Divisor desselben heissen.

Ein Ausdruck von x vom m^{ten} Grade, der keinen Divisor nach dem Modul (p,α) hat, soll ein irreductibler Ausdruck vom m^{ten} Grade nach dem Modul (p,α) heissen.

8) Ein Rest nach dem Modul (p,α), der, in einen Ausdruck von x statt x gesetzt, den Ausdruck $\equiv 0$ (mod. p,α) macht, wird eine Wurzel des Ausdrucks nach dem Modul (p,α) heissen.

9) Ein Ausdruck von x, der vom $m$ten Grade ist, kann höchstens m verschiedene Wurzeln nach dem Modul (p, α) haben.

Beweis. Man setze den Ausdruck nach (*No.* 6.) congruent $a_0(x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ (mod. p, α), wo $a_0, a_1, \ldots a_m$ Ausdrücke von α nach dem Modul (p, α) bedeuten. Gesetzt nun $\varphi_1\alpha$ wäre eine Wurzel jenes Ausdrucks, so hätte man $a_0(\varphi_1\alpha^m + a_1\varphi_1\alpha^{m-1} + \ldots + a_m) \equiv 0$ (mod. p, α) und daher $a_0\{(x^m - \varphi^1\alpha^m) + a_1(x^{m-1} - \varphi_1\alpha^{m-1}) + \ldots\ldots a^{m-1}(x - \varphi_1\alpha)\} \equiv a_0(x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m)$ (mod. p, α). Offenbar hat aber der Ausdruck auf der linken Seite den Factor $x - \varphi_1\alpha$: man kann daher den Ausdruck auf die Form $a_0(x - \varphi_1\alpha)(x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + \ldots b_{m-1})$ bringen, wo $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ Ausdrücke von α bedeuten. Gesetzt nun $\varphi_2\alpha$ wäre eine andere Wurzel des Ausdrucks, so müsste $a_0(\varphi_2\alpha - \varphi_1\alpha)(\varphi_2\alpha^{m-1} + b_1\varphi_2\alpha^{m-2} + \ldots + b_{m-1}) \equiv 0$ (mod. d, α) sein. Da aber $a_0(\varphi_2\alpha - \varphi_1\alpha)$ nicht $\equiv 0$ (mod. p, α) sein kann, so muss $\varphi_2\alpha^{m-1} + b_1 \varphi_2\alpha^{m-2} + \ldots a_{m-1} \equiv 0$ (mod. p, α) und, aus ähnlichem Grunde wie vorher, $x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots b_{m-1} \equiv (x - \varphi_2\alpha)(x^{m-2} + c_1 x^{m-3} + \ldots c_{m-2})$ (mod. p, α) sein, wo $c_1, c_2, \ldots c_{m-1}$ Reste nach dem Modul (p, α) bedeuten. Es wird mithin $a_0(x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m) \equiv a_0(x - \varphi_1\alpha)(x - \varphi_2\alpha)(x^{m-2} + c_1 x^{m-3} + \ldots c_{m-2})$ (mod. p, α). Durch fortgesetzte Schlussfolgen derselben Art findet man, wenn $\varphi_1\alpha, \varphi_2\alpha, \ldots \varphi_m\alpha$ sämmtlich Wurzeln des vorgelegten Ausdrucks sind, $a_0(x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m) \equiv a_0(x - \varphi_1\alpha)(x - \varphi_2\alpha)(x - \varphi_3\alpha) \ldots (x - \varphi^m\alpha)$ (mod. p, α). Sollte der Ausdruck nun noch einen Rest $\psi\alpha$ zur Wurzel haben, so müsste $a_0(\psi\alpha - \varphi_1\alpha)(\psi\alpha - \varphi_2\alpha)(\psi\alpha - \varphi_3\alpha) \ldots (\psi\alpha - \varphi_m\alpha) \equiv 0$ (mod. p, α) sein. Dies kann aber nicht anders geschehen, als wenn einer der Factoren $\psi\alpha - \varphi_1\alpha$, $\psi\alpha - \varphi_2\alpha$, etc. $\equiv 0$ (mod. p, α) wird. Da dies nicht angeht, weil nach der Voraussetzung $\psi\alpha$ von sämmtlichen m Wurzeln $\varphi_1\alpha, \varphi_2\alpha, \ldots \varphi_m\alpha$ verschieden ist, so kann der Ausdruck nicht mehr als m verschiedene Wurzeln haben.

Zusatz. Da sämmtliche kleinste Reste, ausser 0, nach dem Modul (p, α) Wurzeln des Ausdrucks $x^{p^n-1} - 1$ sind (§. 19.), so folgt, dass, wenn man dieselben mit $\varphi_1\alpha, \varphi_2\alpha, \ldots\ldots \varphi_{p^n-1}\alpha$ bezeichnet, stets die Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv (x - \varphi_1\alpha)(x - \varphi_2\alpha) \ldots\ldots (x - \varphi_{p^n-1}\alpha)$ (mod. p, α) Statt finden werde.

10) Ist das Product aus einem Ausdruck von x, nach dem Modul (p, α) und nach einem irreductibeln einfachen Ausdruck desselben Moduls, dem Producte zweier

andern Ausdrücke nach dem Modul (p, α) congruent, so hat einer derselben den irreductibeln Ausdruck nach dem Modul (p, α) zum Divisor.

Beweis wie in §. 5.

11) Jeder Ausdruck kann nur auf eine Weise dem Producte einfacher irreductibler Ausdrücke von x und eines Rests nach dem Modul (p, α) congruent gesetzt werden.

Beweis wie in §. 6.

§. 21.

Erklärung und Lehrsatz. Ist q die kleinste Zahl, welche, als Exponent zu dem Reste $\varphi\alpha$ gesetzt, die hervorgehende Potenz $\equiv 1$ (mod. p, α) macht, so soll gesagt werden, $\varphi\alpha$ gehöre zu q.

Gehört $\varphi\alpha$ zu q, so muss q ein Theiler von $p^n - 1$ sein.

Beweis. Gesetzt q wäre kein Factor von $p^n - 1$, so setze man $p^n - 1 = q.d + r$, wo d der Quotient ist, den man bei der Division von $p^n - 1$ durch q erhält, und r der Rest. Es ist mithin $r < q$. Da nun $(\varphi\alpha)^{qd+r} \equiv 1$ (mod. p, α) (§. 19.), und $(\varphi\alpha)^{qd} \equiv 1$ (mod. p, α) ist, wegen $(\varphi\alpha)^q \equiv 1$ (mod. p, α), so ist offenbar auch $(\varphi\alpha)^r \equiv 1$ (mod. p, α); gegen die Voraussetzung, da $r < q$ ist.

Zusatz. Gehört nun $\varphi\alpha$ zur Zahl q, so werden sämmtliche Ausdrücke $\varphi\alpha$, $(\varphi\alpha)^2, \ldots (\varphi\alpha)^{q-1}$, $(\varphi\alpha)^q$ den Ausdruck $x^q - 1 \equiv 0$ (mod. p, α) machen und sämmtlich von einander verschieden sein. Denn wären etwa zwei congruent, deren Exponenten μ und ν sein mögen, so müsste, wenn $\nu > \mu$ ist, auch $\varphi\alpha^{\nu-\mu} \equiv 1$ (mod. p, α) sein; was nicht möglich ist, da ν und μ, und daher auch $\nu - \mu$, kleiner als q sein muss. Es muss mithin (§. 10. *No.* 9.) $x^q - 1 \equiv (x - \varphi\alpha)(x - \varphi\alpha^2)(x - \varphi\alpha^3) \ldots (x - \varphi\alpha^q)$ mod. p, α) sein.

§. 22.

Lehrsatz. Gehört $\varphi\alpha$ zum Exponenten f und $\psi\alpha$ zum Exponenten q, so kann man stets einen Ausdruck bilden, der zu dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von f und q gehört. Sucht man von diesem Ausdruck seine verschiedenen Potenzen, so werden unter denselben zwei Ausdrücke vorkommen, die mit $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ nach dem Modul (p, α) congruent sind.

Beweis. Sind f und q relative Primzahlen, so wird $\varphi\alpha\,.\,\psi\alpha$ zu $f.q$ gehören. Zunächst ist nämlich

$$(\varphi\alpha\,.\,\psi\alpha)^{fq} = (\varphi\alpha^{f})^{q}\,(\psi\alpha^{q})^{f} \equiv 1 \text{ (mod. } p,\alpha),$$

$$\text{weil } (\varphi\alpha)^{f} \equiv 1 \text{ und } (\psi\alpha)^{q} \equiv 1 \text{ (mod. } p,\alpha)$$

ist. Hieraus folgt, dass der Exponent, zu welchem $\varphi\alpha.\psi\alpha$ gehört, ein Theiler von $p.q$ sein muss. Wäre er nun $\frac{q}{\mathfrak{q}}\cdot\frac{f}{\mathfrak{f}}$, wo $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{f}$, so wie $\frac{q}{\mathfrak{q}}$ und $\frac{f}{\mathfrak{f}}$ ganze Zahlen sind, so hätte man

$$(\varphi\alpha.\psi\alpha)^{\frac{f}{\mathfrak{f}}\cdot\frac{q}{\mathfrak{q}}} \equiv 1 \text{ (mod. } p,\alpha).$$

Erhebt man beide Seiten der Congruenz auf die $\mathfrak{q}^{te}$ Potenz, und bedenkt, dass $(\psi\alpha)^{q\cdot\frac{f}{\mathfrak{f}}} \equiv 1$ (mod. p,α) sein muss, so erhält man $(\varphi\alpha)^{\frac{f}{\mathfrak{f}}\cdot q} \equiv 1$ (mod. p,α). Da aber $\varphi\alpha$ zu f gehört, so muss $\frac{f}{\mathfrak{f}}\cdot q$ nothwendig ein Vielfaches von f, oder $\frac{q}{\mathfrak{f}}$ eine ganze Zahl sein. Da aber q zu f, mithin auch zu $\mathfrak{f}$, als einem Factor von f, relative Primzahl ist, so kann $\frac{q}{\mathfrak{f}}$ nur eine ganze Zahl sein, wenn $\mathfrak{f}$ gleich 1 ist. Es muss mithin $\mathfrak{f}$ gleich 1 und ebenfalls, nach ähnlichen Schlüssen, $\mathfrak{q}$ gleich 1 sein. Da nun fq das kleinste Vielfache von f und q ist, wenn diese relative Primzahlen sind, und $\varphi\alpha\,.\,\psi\alpha$ zu fq gehört, so ist, unter der jetzt gemachten Annahme, der erste Theil dieses Satzes bewiesen.

Sind nun f und q nicht relative Primzahlen, so setze man

$$f = a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\ldots\ldots e^{\varepsilon}\,g^{\varkappa}\,l^{\lambda}$$
$$q = a^{\mathfrak{a}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}\ldots\ldots e^{\mathfrak{e}}\,g^{\mathfrak{g}}\,l^{\mathfrak{l}},$$

wo $a, b, c, \ldots e, g, l, \ldots$ Primzahlen, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon\ \varkappa, \lambda$, so wie $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{e}, \mathfrak{g}, \mathfrak{l}$, ganze positive Zahlen oder 0 in der Art bedeuten, dass die Werthe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, einzeln verglichen, nicht kleiner sind, als die ihnen entsprechenden in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$, und dass die Werthe $\mathfrak{e}, \mathfrak{g}, \mathfrak{l} \ldots$, einzeln verglichen, nicht kleiner sind, als die ihnen entsprechenden in $\varepsilon, \varkappa, \lambda \ldots$ Setzt man nun

$$a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\ldots = M,\ e^{\varepsilon}\,g^{\varkappa}\,l^{\lambda}\ldots n \text{ und}$$
$$a^{\mathfrak{a}}\,b^{\mathfrak{b}}\,c^{\mathfrak{c}}\ldots = m,\ e^{\mathfrak{e}}\,g^{\mathfrak{g}}\,l^{\mathfrak{l}}\ldots N,$$

so wird offenbar MN das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $f.q$ sein. Da nun $\varphi\alpha$ zu Mn gehört, so muss $(\varphi\alpha)^{n}$ zu M, und da $\psi\alpha$ zu mN gehört, so muss $(\psi\alpha)^{m}$ zu N gehören. Offenbar sind aber M und N relative Primzahlen, daher muss $(\varphi\alpha)^{n}\,(\psi\alpha)^{m}$ dem Obigen zufolge zu MN oder zu dem klein-

sten gemeinschaftlichen Vielfachen von f und q gehören, und es ist somit der erste Theil des Satzes allgemein bewiesen.

Setzt man nun voraus, $\mu\alpha$ gehöre zu einem Vielfachen von f, z. B. zu kf, so werden sämmtliche Potenzen von diesem Ausdrucke, deren Exponenten kleiner als kf sind, von einander verschieden sein. Da mithin auch die Ausdrücke $(\mu\alpha)^k, (\mu\alpha)^{2k}, \ldots . (\mu\alpha)^{fk}$ sämmtlich verschieden sein müssen, und da alle diese Ausdrücke der Congruenz $x^f - 1 \equiv 0$ (mod. p, α) genügen, so bilden sie die sämmtlichen Wurzeln derselben. Jeder Ausdruck, der nun ebenfalls dieser Congruenz genügt, also auch $\varphi\alpha$, welches zu f gehört, muss irgend einer Potenz von $\mu\alpha$ congruent werden. Setzt man statt $\mu\alpha$ den Ausdruck $(\varphi\alpha)^n (\psi\alpha)^m$, so folgt, da derselbe zu NM gehört, also zu einem Vielfachen der Zahlen f und q, zu welchen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ gehören, dass er einer der Potenzen von $(\varphi\alpha)^n (\psi\alpha)^m$ nach dem Modul (p,α) congruent werden müsse. Und hiermit ist der zweite Theil des Satzes bewiesen.

§. 23.

Erklärung und Lehrsatz. Ist α die Wurzel eines Ausdrucks vom $n$ten Grade, so sollen die Ausdrücke von α, oder die Reste nach dem Modul (p,α), welche zu $p^n - 1$ gehören, primitive Wurzeln der Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α) heissen.

Es giebt so viele primitive Wurzeln der Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv 1$ (mod. p, α), als es Zahlen giebt, die kleiner als $p^n - 1$ und zu dieser Zahl relative Primzahlen sind.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass überhaupt primitive Wurzeln von der Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α) existiren. Nach §. 22. kann man stets einen Ausdruck zu Grunde legen, der in seinen verschiedenen Potenzen irgend zwei gegebene Ausdrücke erzeugt. Sollte nun unter den Potenzen dieses Restes nach dem Modul (p,α) noch irgend ein Rest nach demselben Modul nicht enthalten sein, so bilde man wieder (§. 22.) einen Rest, der in seinen verschiedenen Potenzen sowohl diesen Rest, als auch denjenigen erzeugt, in dessen verschiedenen Potenzen die ersten beiden Reste vorkommen: dann folgt, dass in den Potenzen des zuletzt gebildeten Rests die gewählten drei Reste enthalten sein werden. Durch ein fortgesetztes Verfahren derselben Art muss man natürlich zuletzt einen Rest erhalten, der in seinen verschiedenen Potenzen sämmtliche $p^n - 1$ Reste nach dem Modul (p,α) erzeugt. Gesetzt nun, $\varphi\alpha$ sei ein solcher Rest und m eine relative Prim-

zahl zu $p^n - 1$, so muss auch $(\varphi\alpha)^m$ eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ sein. Wollte man nämlich annehmen, $\varphi\alpha^m$ gehöre zu x, so müsste $\varphi\alpha^{mx} \equiv 1 \pmod{p, \alpha}$ sein, und es müsste mx ein Vielfaches von $p^n - 1$ sein: da aber m relative Primzahl zu $p^n - 1$ ist, so muss x das kleinste Vielfache von $p^n - 1$ d. h. $p^n - 1$ selbst sein. Es wird mithin so viele primitive Wurzeln der Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ geben, als es relative Primzahlen zu $p^n - 1$ giebt, die kleiner sind als diese Zahl, 1 mit eingerechnet. Lässt man die Exponenten über $p^n - 1$ hinaus wachsen, so werden die daraus hervorgehenden Potenzen von φx denjenigen Potenzen dieses Rests congruent sein, welche zu Exponenten gehören, die mit jenen nach dem Modul $p^n - 1$ congruent sind, oder $(\varphi\alpha)^z$ wird $\equiv (\varphi\alpha)^r \pmod{p.\alpha}$ sein, wenn r der kleinste Rest ist, den z, durch $p^n - 1$ dividirt, lässt. Dies folgt leicht, wenn man für z eine Zahl von der Form $(p^n - 1)\, q + r$ setzt, wo q den Quotienten angiebt, den x, durch $p^n - 1$ dividirt, giebt, und r den Rest.

Zusatz. Bezeichnet $r\alpha$ eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, so folgt aus (§. 20. *No.* 9. *Zus.*), dass $x^{p^n-1} - 1 \equiv (x - r\alpha)(x - r\alpha^2)(x - r\alpha^3) \ldots\ldots (x - r\alpha^{p^n-1}) \pmod{p}$ ist.

§. 24.

Lehrsatz. Ist die Norm eines einfachen Ausdrucks von x in Bezug auf einen zweiten einfachen Ausdruck congruent $0 \pmod{p, \alpha}$, so ist auch die Norm des zweiten in Bezug auf den ersten congruent $0 \pmod{p, \alpha}$.

Beweis. Nennt man die einfachen Ausdrücke, um die es sich handelt, Fx und φx, so folgt zunächst, dass NF_φ und $N\varphi_F$ Ausdrücke der Coefficienten von Fx und von φx sein werden. Da aber diese Coefficienten selbst Ausdrücke von α sind, so folgt, dass NF_φ und $N\varphi_F$ bloss Ausdrücke von α sein werden. Da nun aber (§. 7. Einl.) $\pm NF_\varphi = N\varphi_F$ ist, so folgt, dass $N\varphi_F$ und NF_φ stets zugleich $\equiv 0 \pmod{p, \alpha}$ sein werden.

§. 25.

Lehrsatz. Die Norm eines Ausdrucks von x in Bezug auf einen zweiten Ausdruck, der dem Product mehrerer Ausdrücke congruent ist, ist dem Product der Normen des ersten Ausdrucks in Bezug auf sämmtliche Factoren des zweiten nach dem Modul p, α congruent.

Beweis wie in §. 9.

§. 26.

Lehrsatz. Die Norm eines irreductibeln einfachen Ausdrucks von x nach dem Modul (p,α) kann in Bezug auf einen zweiten Ausdruck von x von geringerem Grade nicht congruent 0 (mod. p,α) werden.

Beweis wie in §. 10.

§. 27.

Lehrsatz. Ist Fx ein irreductibler Ausdruck und φx ein einfacher Ausdruck nach dem Modul (p,α), so ist Fx ein Divisor von φx in Bezug auf den Modul p,α, wenn $NF_\varphi \equiv 0$ (mod. p,α) ist.

Beweis wie in §. 11.

§. 28.

Lehrsatz. Jeder zu dem Modul (p,α) gehörige Ausdruck von x, dessen Wurzeln, in eine bestimmte Potenz eines irreductibeln Ausdrucks gesetzt, dieselbe, wenn man sie mit einem gewissen Rest des Moduls (p,α), der nicht $\equiv 0$ (mod. p,α) ist, multiplicirt, einem bestimmten p fachen Ausdruck der jedesmaligen Wurzel gleich machen, ist selbst eine Potenz jenes irreductibeln Ausdrucks nach dem Modul (p,α).

Beweis wie in §. 7.

§. 29.

Lehrsatz. Entwickelt man die Gleichung für einen Ausdruck der Wurzel eines in Bezug auf den Modul (p,α) einfachen irreductibeln Ausdrucks, und bezeichnet dieselbe durch $Gz = 0$, so ist Gz in Bezug auf den Modul (p,α) entweder irreductibel, oder die Potenz eines irreductibeln Ausdrucks.

Beweis wie in §. 12.

Zusatz. Ist der Grad des einfachen irreductibeln Ausdrucks von x grösser als der Grad des Ausdrucks seiner Wurzel, so kann Gz nicht $\equiv (Z-B_1)^m$ (mod. p,α) werden, wenn B_1 einen Rest nach dem Modul (p,α) und m den Grad des irreductibeln Ausdrucks von x bedeutet.

§. 30.

Lehrsatz. Ist φx in Bezug auf den Modul (p,α) von einem höhern Grade als dem 0ten und von einem niedrigeren Grade als dem m^{ten}, so kann nicht

$(\varphi x)^{p^n} \equiv \varphi x + Fx.Qx$ (mod. p,α) sein, wenn n den Grad des irreductibeln Ausdrucks anzeigt, von welchem α eine Wurzel und Fx nach dem Modul (p,α) irreductibel und vom $m$ten Grade ist, und ferner Qx irgend einen Ausdruck nach dem Modul (p,α) bedeutet.

Beweis. Existirte obige Congruenz, so könnte man dieselbe auch so schreiben: $\varphi x\{\varphi x^{p^n-1} - 1\} \equiv Fx.Qx$ (mod. p,α). Bedeutet aber rx eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^n-1}-1 \equiv 0$ (mod. p,α), so hat man nach (§. 23. *Zus.*) $x^{p^n-1} - 1 \equiv (x-r\alpha)\,(x-(r\alpha)^2)\ldots\ldots(x-(r\alpha)^{p^n-1})$ (mod. p,α), und hieraus folgt $(\varphi x)^{p^n-1} - 1 \equiv (\varphi x - r\alpha))\,(\varphi x-(r\alpha)^2)\ldots\ldots(\varphi x-(r\alpha)^{p^n-1})$ (mod. p,α). Sollte nun obige Congruenz bestehen, so müsste Fx in Bezug auf den Modul (p,α) ein Theiler der Ausdrücke φx, $\varphi x-(r\alpha),\ldots\ldots$ $\varphi x-(r\alpha)^{p^n-1}$ sein (§. 20. *No.* 10.). Da aber jeder dieser Ausdrücke von einem niedrigeren Grade als dem $m$ten ist, so geht dies nicht an.

§. 31.

Erklärungen und Lehrsätze. Bedeutet $Fx \equiv 0$ (mod. $p.\ \alpha$) eine einfache irreductible Congruenz, und β eine Wurzel der Gleichung $Fx = 0$, so sollen zwei Ausdrücke von β, deren Coefficienten Ausdrücke von α sind, nach dem Modul (p,α,β) congruent heissen, wenn sich der eine von ihnen als Summe des andern und eines $p$fachen Ausdrucks von β, dessen Coefficienten ebenfalls Ausdrücke von α sind, darstellen lässt.

1) Ist also $\varphi\beta = \psi\beta + pR\beta$, wo $\varphi\beta$, $\psi\beta$, $R\beta$ ganze rationale Functionen von β bedeuten, in welchen die Coefficienten Ausdrücke von α sind, so ist $\varphi\beta$ congruent $\psi\beta$ in Bezug auf den Modul $(p,\alpha,\beta,)$, und es wird geschrieben werden: $\varphi\beta \equiv \psi\beta$ (mod. p,α,β).

2) Ist $\varphi\beta \equiv \psi\beta$ (mod. $p,\alpha\beta$), so ist Fx in Bezug auf den Modul (p,α) ein Theiler von $\varphi x - \psi x$.

Beweis. Da Fx nach dem Modul (p,α) irreductibel ist, so lässt es sich in algebraischer Beziehung gewiss nicht in zwei Factoren zerfällen, die ganze rationale Functionen von x und deren Coefficienten Ausdrücke von α sind. Hieraus folgt nun, ähnlich wie in (§. 3 Einl.), dass Fx mit einem Ausdrucke von x, dessen Coefficienten Ausdrücke von α sind, nur dann eine Wurzel gemeinschaftlich haben kann, wenn es algebraischer Divisor des Ausdrucks ist. Da nun aber $Fx = 0$, und $\varphi x - \psi x - pRx = 0$ die Wurz-

zel β gemeinschaftlich haben, so muss Fx ein Factor von $\varphi x - \psi x - pRx$ und mithin in Bezug auf den Modul (p,a) ein Factor von $\varphi x - \psi x$ sein.

3) Wenn das Product zweier Ausdrücke von β congruent 0 nach dem Modul (p,α,β) ist, so ist einer von jenen Ausdrücken selbst nach diesem Modul congruent 0.

Beweis wie in §. 14. *No.* 5.

4) Eine Function von x, deren Coefficienten Ausdrücke von β nach dem Modul $(\bar{p},\alpha\beta)$ sind, soll ein Ausdruck von x nach dem Modul (p,α,β) heissen. Zwei solcher Ausdrücke werden einander congruent gesetzt nach dem Modul (p,α,β), wenn die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von x in beiden nach diesem Modul congruent sind.

Zusatz. Nach dieser jetzt eingeführten Bezeichnung kann man den Inhalt des §. 30. folgendermassen aussprechen: Wenn β die Wurzel eines irreductibeln Ausdrucks vom $m$ten Grade nach dem Modul (p,α) ist, und $\varphi\beta$ bezeichnet irgend einen Ausdruck von β, dessen Coefficienten Ausdrücke von α sind, und dessen Grad in Bezug auf den Modul (p,α,β) kleiner als m und grösser als 0 ist, so kann nicht $(\varphi\beta)^{p^n} \equiv \varphi\beta$ (mod. p,α,β) sein.

§. 32.

Bedeutet Gx einen Ausdruck von x nach dem Modul (p,α,β), und stellt man sich die Coefficienten dieses Ausdrucks durch Division mit $F\beta$ auf ihre Reste reducirt vor (weil die Vielfachen von $F\beta$ mit diesem Ausdrucke selbst verschwinden), mithin auf lauter Ausdrücke von geringerem Grade als Fx, und diese Ausdrücke reduciren sich nicht sämmtlich auf Ausdrücke von α, indem die verschiedenen Potenzen von β nur in solche Ausdrücke von α multiplicirt sind, die nach dem Modul (p,α) congruent 0 zu setzen sind: so kann auch der Ausdruck von x, dessen Wurzeln die (p^n)ten Potenzen der Wurzeln von Gx sind, nicht mit Gx nach dem Modul (p,α,β) übereinstimmen. Setzt man nämlich $Fz = \varphi_0 . x^k + \varphi_1 x^{k-1} + \ldots\ldots \varphi^k$, wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots\ldots \varphi_k$ Ausdrücke nach dem Modul (p,α,β) bezeichnan, so folgt aus (§. 13. *No.* 2.), dass der Ausdruck von x, dessen Wurzeln die (p^n)ten Potenzen der Wurzeln von Gx sind, nach dem Modul (p,α,β) congruent $\varphi_0^{p^n} . x^k + \varphi_1^{p^n} x^{k-1} + \ldots . + \varphi_k^{p^n}$ sein werde. Da nun aber diejenigen unter den Coefficienten von Gx. die sich nicht auf reine Ausdrücke von α reduciren, nicht mit ihren (p^n)ten Potenzen nach dem Modul (p,α,β) congruent sein können (§. 31.), so kann auch Gx

nicht mit dem Ausdruck congruent nach dem Modul (p, α, β) sein, dessen Wurzeln die (p^n)ten Potenzen seiner Wurzeln sind.

§. 33.

Lehrsatz. Es kann nicht $\beta^{p^{k.n}} \equiv \beta$ (mod. p, α, β) sein, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, die kleiner als der Grad des Ausdrucks Fx ist, von welchem β eine Wurzel ist.

Beweis. Wäre $\beta^{p^{k.n}} \equiv \beta$ (mod. p, α, β), so wäre auch $(x-\beta)$ $(x-\beta^{p^n})\,(x-\beta^{p^{2n}}) \ldots\ldots (x-\beta^{p^{(k-1)n}}) \equiv (x-\beta^{p^n})\,(x-\beta^{p^{2n}}) \ldots (x-\beta^{p^{(k-1)n}})$ $(x-\beta^{p^{kn}})$ (mod. p. α, β). Da der zweite Ausdruck die (p^n)ten Potenzen des ersten enthält, so müssten nach (§. 32.) die Coefficienten von $(x-\beta)\,(x-\beta^{p^n}) \ldots\ldots$ $(x-\beta^{p^{(k-1)n}})$ auf reine Ausdrücke von α sich reduciren. Im Uebrigen folgt nun der Beweis wie in (§. 17.).

§. 34.

Lehrsatz. Ist $Fx \equiv 0$ (mod. p, α) eine einfache irreductible Congruenz vom Grade m, deren Coefficienten im Allgemeinen zum Modul (p, α) gehören, und β eine Wurzel von Fx, so ist stets

$$Fx \equiv (x-\beta)\,(x-\beta^{p^n})\,(x-\beta^{p^{2n}}) \ldots\ldots (x-\beta^{p^{(m-1)n}}) \text{ (mod. } p, \alpha, \beta)$$

und $\beta^{p^{m.n}-1} \equiv 1$ (mod. p, α, β).

Beweis. Da die Coefficienten von Fx Ausdrücke von α sind, so sollen sie durch $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha, \ldots \varphi_m$ bezeichnet werden. Es ist mithin $Fx = x^m + \varphi_1\alpha \,.\, x^{m-1} + \varphi_2\alpha \,.\, x^{m-2} + \ldots + \varphi_m\alpha$. Aus (§. 13. *No.*) folgt nun, dass derjenige Ausdruck, welcher die $p^{n.k}$ Potenzen der Wurzeln von Fx enthält, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, nach dem Modul (p, α) congruent $x^m + (\varphi_1\alpha)^{p^{kn}}\, x^{m-1} + (\varphi_2\alpha)^{p^{kn}}\, x^{p^{m-n}} + \ldots\ldots + (\varphi_m\alpha)^{p^{kn}}$, und daher aus (§. 19.), dass dieser Ausdruck nach demselben Modul congruent $x^m + \varphi_1\alpha \,.\, x^{m-1} + \varphi_2\alpha \,.\, x^{m-2} + \ldots\ldots + \varphi_m\alpha$ sein werde. Hieraus folgt $F(\beta^{p^{kn}}) \equiv 0$ (mod. p, α, β). Im Uebrigen ist der Beweis, mit Hinzuziehung der (§. 31 und 33.), ganz ähnlich dem in §. 18.

Zusatz. Ist $fx \equiv 0$ (mod. p, α) eine einfache irreductible Congruenz vom Grade n, in welcher aber die Coefficienten ebenfalls Ausdrücke von α sind, aber ganzen reellen Zahlen nach dem Modul (p, α) congruent gesetzt werden können, so ist

$fx \equiv (x-\alpha)\,(x-\alpha^p)\,\ldots\,(x-\alpha^{p^{n-1}})$ (mod. p,α) und $\alpha^{p^n-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α).

Der Beweis kann durchaus wie in §. 18. gegeben werden; was darauf beruht, dass die Sätze, welche sich auf reelle ganze Zahlen als Coefficienten nach dem Modul p beziehen, natürlich auch unmittelbar für den Modul (p,α) gelten.

§. 35.

Die Sätze über die Moduln von der Form (p,α,β) hätten noch vollständiger aufgezählt und auch noch auf zusammengesetztere Moduln ausgedehnt werden können, indessen scheint es, dass der Gang, so wie die Resultate dieser Untersuchung, klar genug vorliegen, und dass also die weitere Ausführung nicht nöthig ist.

Wir wenden uns demnach zu dem Theile der Untersuchung, der sich mit dem Beweise der Existenz irreductibler Congruenzen von jedem Grade nach dem Modul p, und mit der Anzahl solcher Congruenzen beschäftigt.

§. 36.

Lehrsatz. Ist $fx\equiv 0$ (mod. p) eine irreductible einfache Congruenz vom *nten* Grade, so wird der Ausdruck, welcher die (p^n-1)*ten* Potenzen der Wurzeln von fx enthält, nach dem Modul p congruent $(x-1)^n$ sein. Setzt man ferner, n_1 sei eine ganze Zahl und kleiner als n, und den Ausdruck, welcher die $(p^{n_1}-1)$*ten* Potenzen der Wurzeln von fx enthält, gleich dx, so kann nicht $d(1)$ congruent 0 nach dem Modul p sein.

Beweis. Bezeichnet α irgend eine Wurzel von fx, so folgt aus §. 18., dass sich stets für jede dieser Wurzeln eine Gleichung von der Form α^{p^n-1} $(=1+pR\alpha)$ (wo $R\alpha$ einen bestimmten Ausdruck von α bezeichnet) werde aufstellen lassen. Bezeichnet man nun die übrigen Wurzeln von fx durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, so folgt $(x-\alpha^{p^n-1})\,(x-\alpha_1^{p^n-1})\ldots(x-\alpha_{n-1}^{p^n-1}) = (x-1-pR\alpha)$ $(x-1-pR\alpha_1)\ldots(x-1-pR\alpha_{n-1})$. Dieser letzte Ausdruck ist aber offenbar $\equiv (x-1)^n$ (mod. p,α); wodurch der erste Theil des Satzes bewiesen ist.

Nehme man nun an, $d(1)$ wäre $\equiv 0$ (mod. p), so müsste dx in Bezug auf den Modul p den Divisor $x-1$ haben. Da aber nach (§. 12.) dx die Potenz eines irreductibeln Ausdrucks sein muss, so würde folgen: $dx\equiv (x-1)^n$ (mod. p). Es ist aber $dx = (x-\alpha^{p^{n_1}-1})\,D(x,\alpha)$, wo $D(x,\alpha)$

den Quotienten angiebt, den man erhält, wenn man dx durch $x-\alpha^{p^{n_1}-1}$ dividirt, und dessen Coefficienten mithin Ausdrücke von α sind. Man erhält also $(x-1)^n \equiv (x-\alpha^{p^{n_1}-1}\, D(x,\alpha)$ (mod. p,α). Hiernach müsste aber offenbar $x-1 \equiv x-\alpha^{p^{n_1}-1}$ (mod. p,α) und $1 \equiv \alpha^{p^{n_1}-1}$ (mod. p,α) sein; welches nach (§. 17.) nicht angeht, indem $n_1 < n$ ist.

Zusatz. Enthält irgend ein Ausdruck, in Bezug auf den Modul p, einen irreductibeln Divisor vom Grade m, und bezeichnet man den Ausdruck, welcher die (p^m-1)*ten* Potenzen der Wurzeln jenes Ausdrucks zu seinen Wurzeln hat, durch dx, so wird dx offenbar den Factor $(x-1)^m$ in Bezug auf den Modul p enthalten, und demnach muss dann $d(1) \equiv 0$ (mod. p) sein. Wird nun aber $d(1)$ nicht früher $\equiv 0$ (mod. p), als wenn $n_1 = n$ ist, so ist nothwendig der in Betracht gezogene Ausdruck irreductibel. Also erhält man folgenden Lehrsatz:

§. 37.

Lehrsatz. Ist der Ausdruck fx von der Art, dass diejenigen Ausdrücke von x, deren Wurzeln die $(p^{n_1}-1)$*ten* Potenzen der Wurzeln von fx sird, nicht nach dem Modul p congruent 0 werden, wenn man in ihnen, 1 statt x setzt, so lange $n_1 < n$ ist, so ist fx in Bezug auf den Modul p irreductibel.

§. 38.

Lehrsatz. Ist Fx ein einfacher irreductibler Ausdruck nach dem Modul (p,α) und vom Grade m, und ist α die Wurzel eines irreductibeln Ausdrucks vom Grade n nach dem Modul p, so ist der Ausdruck, dessen Wurzeln die $(p^{mn}-1)$*ten* Potenzen der Wurzeln von Fx sind, congruent $(x-1)^m$ (mod. p,α).

Der Beweis folgt ähnlich wie in (§. 36.); doch hier mit Hinzuziehung von (§. 34.) statt (§. 18.). Auf ähnlichem Wege, wie vorher, ergiebt sich folgender Lehrsatz.

§. 39.

Lehrsatz. Ist der Ausdruck Fx von der Art, dass diejenigen Ausdrücke von x, welche $(p^{m_1 n}-1)$*te* Potenzen der Wurzeln von Fx sind, nicht nach dem Modul (p,α) congruent 0 werden, wenn man in ihnen 1 statt x

setzt, so lange $m_1 < m$ oder als der Grad von Fx ist, so muss Fx in Bezug auf den Modul (p, α) irreductibel sein.

§. 40.

Lehrsatz. Ist m ein Theiler von $p-1$ und g eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p), ferner k eine relative Primzahl zu m, so ist $x^m - g^k \equiv 0$ (mod. p) eine irreductible Congruenz.

Beweis. Da m ein Theiler von $p-1$ ist, so wird die Congruenz $x^m - 1 \equiv 0$ (mod. p) m reelle Wurzeln haben. Nennt man dieselben $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$, so wird der Ausdruck, dessen Wurzeln die $(p^q - 1)$ten Potenzen der Wurzeln von $x^m - g^k$ sind, nach dem Modul p dem folgenden Ausdrucke congruent sein:

$$\left(x - (\gamma_1 \sqrt[m]{g^k})^{p^q-1}\right)\left(x - (\gamma_2 \sqrt[m]{g^k})^{p^q-1}\right) \ldots \ldots \left(x - (\gamma_m \sqrt[m]{g^k})^{p^q-1}\right).$$

Da aber offenbar jeder Werth von γ, zur $(p^q - 1)$ten Potenz erhoben, $\equiv 1$ (mod. p) ist, so wird der Ausdruck die einfachere Gestalt $\left(x - g^{k\left(\frac{p^q-1}{m}\right)}\right)^m$ annehmen. Sollte dieser Ausdruck nun für $x=1$ congruent 0 (mod. p) werden, so müsste $g^{k\left(\frac{p^q-1}{m}\right)}$ $\equiv 1$ (mod. p) sein. Es ist aber $k\left(\frac{p^q-1}{m}\right) = k \cdot \left(\frac{p-1}{m}\right) \{p^{q-1} + p^{q-2} + \ldots + 1\}$, und da $p \equiv 1$ (mod, $p-1$) ist, so ist $k\frac{p-1}{m}(p^{q-1} + p^{q-2} + \ldots + 1)$ $\equiv k\frac{p-1}{m} \cdot q$ (mod. $p-1$). Da aber k relative Primzahl zu m ist, so kann $k \cdot \frac{p-1}{m} \cdot q$ nur dann $\equiv 0$ (mod. $p-1$) werden, wenn q den Factor m enthält. So lange also q einen kleinern Werth als m hat, kann $g^{k\left(\frac{p^q-1}{m}\right)}$ nicht $\equiv 1$ (mod. p) und mithin der Ausdruck, dessen Wurzeln die $(p^q - 1)$ten Potenzen der Wurzeln von $x^m - g^k$ sind, nicht, wenn man in ihm $x = 1$ setzt, $\equiv 0$ (mod. p) werden. Demnach ist (§. 37.) $x^m - g^k$ nach dem Modul p irreductibel.

§. 41.

Lehrsatz. Ist $r\alpha$ eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^n-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α) und m ein Theiler von $p^n - 1$, ferner k eine relative Primzahl zu q, so ist $x^m - (r\alpha)^k$ ein irreductibler Ausdruck nach dem Modul (p, α).

Beweis. Da m ein Theiler von $p^n - 1$ ist, so wird die Congruenz $x^m - 1$ (mod. p, α) m Reste nach dem Modul (p, α) zu Wurzeln haben. Nennt man dieselben $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma^m$, so wird der Ausdruck, welcher die $(p^{nq}-1)$ten Potenzen der Wurzeln von $x^m - r\alpha,^k$ als Wurzeln enthält, nach dem Modul (p, α) congruent

$$\left(x - (\gamma_1 \sqrt[m]{r\alpha^k})^{p^{nq}-1}\right)\left(x - (\gamma_2 \sqrt[m]{r\alpha^k})^{p^{nq}-1}\right) \ldots \ldots \left(x - (\gamma_m \sqrt[m]{r\alpha^k})^{p^{nq}-1}\right)$$

werden. Da aber $p^{nq} - 1$ den Factor $p^n - 1$ enthält, so wird jeder Werth von γ, zur $(p^{nq}-1)$ten Potenz erhoben, congruent 1 (mod. p, α) werden. Der Ausdruck geht also in den einfacheren $\left(x - (r\alpha)^{k.\frac{p^{nq}-1}{m}}\right)$ über. Sollte dieser Ausdruck nach dem Modul (p, α) congruent 0 werden, wenn $x = 1$ ist, so müsste $(r\alpha)^{k.\frac{p^{nq}-1}{m}} \equiv 1$ (mod. p, α) werden. Dies kann aber nur geschehen, wenn $k.\frac{p^{nq}-1}{m}$ ein Vielfaches von $p^n - 1$ ist. Es ist aber $k.\frac{p^{nq}-1}{m} = k\frac{p^n-1}{m}\{p^{n(q-1)} + p^{n(q-2)} + \ldots + 1\}$, und da $p^n \equiv 1$ (mod. $p^n - 1$) ist, so ist

$$k\frac{p^n-1}{m}(p^{n(q-1)} + p^{n(q-2)} + \ldots + 1) \equiv k.\frac{p^n-1}{m}.q \,(\text{mod.}\, p^n - 1).$$

Dieser Ausdruck kann aber, da k zu m relative Primzahl ist, nur dann congruent 0 (mod. $p^n - 1$) werden, wenn q den Factor m enthält. So lange also q einen kleineren Werth als m hat, kann der Ausdruck, dessen Wurzeln die $(p^{qn}-1)$ten Potenzen der Wurzeln von $x^m - (r\alpha)^k$ enthalten, nicht für $x = 1$ nach dem Modul (p, α) congruent 0 werden, und mithin ist $x^m - (r\alpha)^k$ nach dem Modul (p, α) irreductibel (§. 39.).

§. 42.

Lehrsatz. Bedeutet $F(x, \alpha)$ irgend einen irreductiblen Ausdruck vom $m$ten Grade nach dem Modul (p, α), in welchem der Coefficient irgend einer Potenz von x der Congruenz $x^{p^{n_1}-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α) nur dann genügt, wenn n_1 dem n oder einem Vielfachen dieser Zahl gleich wird, so ist $F(x, \alpha) \,.\, F(x, \alpha^p) \,.\, F(x, \alpha^{p^2}) \ldots F(x, \alpha^{p^{n-1}})$ ein Ausdruck, dessen Coefficienten nach dem Modul (p, α) ganzen reellen Zahlen congruent zu setzen sind, und der, wenn dies geschehen, nach dem Modul p ein irreductibler Ausdruck vom $(m.n)$ten Grade ist.

Beweis. Ist α eine Wurzel von $fx = 0$ (mod. p), so ist $fx \equiv (x - \alpha)(x - \alpha^p) \ldots (x - \alpha^{p^{n-1}})$ (mod. p, α) §. 18.). Nennt man nun die Wurzeln

von $fx.Qx+pRx$ oder von $\frac{x^n-1}{x-1}$ als Wurzeln in sich schliesst, $=(x-1)^n$ wird, so muss offenbar $(x-\alpha^N)(x-\alpha^{Np})\ldots(x-\alpha^{Np^{n-1}})$ in Bezug auf den Modul (p,α) ein Divisor von $(x-1)^n$ sein. Hiernach muss aber, wie leicht zu sehen, $\alpha^N\equiv 1$ (mod. p,α) sein. Da nun $N=p^{n_1}-1$ ist, so folgt, dass der Grad von fx die Zahl n_1 nicht überschreiten kann (§. 17.) Da er aber nach dem Vorhergehenden auch nicht weniger als n_1 betragen kann, so muss er n_1 selbst sein.

Zusatz. 1. Ist $n=p$, so ist $x^p-1\equiv(x-1)^p$ (mod. p) und mithin $\frac{x^p-1}{x-1}\equiv(x-1)^{p-1}$ (mod. p).

Zusatz 2. Wenn p in Bezug auf den Modul n eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{n-1}-1\equiv 0$ (mod. n) ist, so ist der Ausdruck $\frac{x^n-1}{x-1}$ nach dem Modul p irreductibel. Da es nun stets primitive Wurzeln der Congruenz $x^{n-1}-1\equiv 0$ (mod. n) giebt, so sei g eine solche. Es giebt aber unendlich viele Primzahlen von der Form $g+yn$, wo y eine ganze Zahl bedeutet. (Vergl.: Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, von *Lejeune-Dirichlet*, gelesen in der Academie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Juli 1837). Nach allen diesen Primzahlen muss $\frac{x^n-1}{x-1}$ irreductibel sein, woraus denn unzweifelhaft folgt, dass es in algebraischer Beziehung gewiss irreductibel sein muss.

Auf ganz anderem Wege hat *Gauss* den Satz (Zus. 2.) im §. 341. Pg. 599. der *Disquisitiones arithmeticae* bewiesen.

23.

Demonstratio duorum theorematum Gaussianis his generaliorum:

I. *Productum ex omnibus radicibus primitivis moduli imparis* p *unitate sec.* p *congruum est, excepto casu, in quo* p = 3.

II. *Summa omnium radicum primitivarum moduli primi imparis* p *est* ≡ 0, *quando* p — 1 *per quadratum aliquod divisibilis est; quando vero per nullum quadratum divisibilis, summa est* ≡ ± 1, *prout multitudo factorum ipsius* p — 1 *primorum est* par / aut impar.

(*Auctore Friderico Arndt, Sundiae*).

Theoremata, quae demonstraturus sum, haec sunt:

I. *Productum ex omnibus ad eundem exponentem* t *sec. mod.* p^n *vel* $2p^n$ *pertinentibus, denotante* p *num. primum imparem, unitati congruum est sec. mod. prop., excepto casu, in quo* t = 2;

II. *Summa omnium numerorum ad eundem exponentem* t *sec. mod.* p *pertinentium, denotante* p *num. primum imparem, est* ≡ 0, *quondo* f *per quadratum aliquod divisibilis est, quando vero* t *per nullum quadratum divisibilis, summa est* $\equiv \pm 1_1$, *prout multitudo factorum ipsius* t *primorum est* par / aut impar.

Demonstratio ad I.

Denotante a numerum quemcunque ad exponentem t sec. mod. p^n vel $2p^n$ pertinentem, omnes numeri ad t pertinentes residuis potestatum exhibentur:

$$a^{k_1},\ a^{k_2},\ a^{k_3}, \ldots a^{k_{\varphi t}},$$

ubi sunt $k_1, k_2, k_3, \ldots k_{\varphi t}$ omnes ad t primi eoque minores. Itaque productum P illorum numerorum congruum est potestati

$$a^{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{\varphi t}}.$$

Jam vero exponens per t divisibilis est, excepto $t = 2$, ut facile patet, atque $a^t \equiv 1$, ergo etiam $P \equiv 1$ (mod. p^n vel $2p^n$).

Demonstratio ad II.

(*A*). Factore primo aliquo, cujus quadratum exponentem t metiatur, per α designato, patet, si k sit numerus ad t primus, etiam $k + \frac{t\varphi}{\alpha}$ ad t primum fore, designante φ integrum quemcunque Nam primum numeri t, $k + \frac{t\varphi}{\alpha}$ factorem α non simul involvent, quando quidem ex supp. $\frac{t\varphi}{\alpha}$ per α divisibilis est, ergo, si illud fieri posset, numeri t, k factorem communem α haberent, contra supp. Quodsi numeri de quibus agitur, factorem primum communem δ haberent, ab α diversum, esset $k + \frac{t\varphi}{\alpha}$, ideoque $\alpha k + t\varphi$, ergo k per δ divisibilis, haberentque etiam nunc t et k factorem communem.

Denotante igitur a numerum ad exp. t pertinentem, residua potestatum

$$a^k,\ a^{k+\frac{t}{\alpha}},\ a^{k+\frac{2t}{\alpha}} \ldots\ldots a^{k+\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}},$$

quorum multitudo α, ad eundem exponentem t pertinebant. Quae residua incongrua esse perspicuum est. Complexus eorum sit K.

Multitudo numerorum ad t primorum eoque minorum ipsius α multiplum esse debet. Posito enim $t = \alpha^g \beta^h \gamma^i$ etc., ubi $g \geqq 2$, habetur $\varphi t = \alpha^{g-1}(\alpha-1)\beta^h(\beta-1)\gamma^{i-1}(\gamma-1)$ etc, ubi $g - 1 \geqq 1$, ex quo φt per α divisibilis.

Jam sit k_1 numerus ad t primus, ab horum quoque diversus

$$k, k + \frac{t}{\alpha}, k + \frac{2t}{\alpha}, \ldots k + \frac{(\alpha-1)t}{\alpha},$$

habenturque denuo α numeri ad t pertinentes potestatibus congrui:

$$a^{k_1},\ a^{k_1+\frac{t}{\alpha}},\ a^{k_1+\frac{2t}{\alpha}}, \ldots\ldots a^{k_1+\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}},$$

omnesque sunt incongrui inter se. Complexus eorum sit L.

Porro sit k_2 numerus ad t primus, ab horum quoque diversus

$$k, k + \frac{t}{\alpha}, k + \frac{2t}{\alpha}, \ldots k + \frac{(\alpha-1)t}{\alpha}$$

$$k_1, k_1 + \frac{t}{\alpha}, k_1 + \frac{2t}{\alpha} \ldots k_1 + \frac{(\alpha-1)t}{\alpha}$$

habenturque denuo α numeri ad t pertinentes potestatibus congrui:

$$a^{k_2}, a^{k_2+\frac{t}{\alpha}},\ a^{k_2+\frac{2t}{\alpha}}, \ldots a^{k_2+\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}},$$

omnesque incongrui sunt inter se. Complexus eorum sit M.

Hoc modo progredi licet, quoad omnes numeri ad t primi sunt exhausti; scilicet, si $\varphi t = \alpha q$, multitudo complexuum erit q.

Jam summa numerorum cujusque complexus per modulum p divisibilis est. Denotante enim s summam numerorum complexus K, habetur

$$s = a^k\left(1 + a^{\frac{t}{\alpha}} + a^{\frac{2t}{\alpha}} + \ldots + a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}\right)$$
$$= a^k.\frac{a^t-1}{a^{\frac{t}{\alpha}}-1},$$
$$\text{vel } s(a^{\frac{t}{\alpha}} - 1) = a^k(a^t - 1)$$

Quum autem sit $a^t \equiv 1$ (mod. p), erit $s\,(a^{\frac{t}{\alpha}}-1)$ per p divisibilis; atque $a^{\frac{t}{\alpha}} - 1$ per p divisibilis esse nequit, quoniam a^t est infima unitati congrua potestas; ergo s per p divisibilis est.

Denotantibus igitur s, s_1, s_2, etc. summas complexuum K, L, M, etc., habetur $s \equiv 0$, $s_1 \equiv 0$, $s_2 \equiv 0$ (mod. p) etc, unde $s + s_1 + s_2 +$ etc. $\equiv 0$ (mod. p) i. e. summa numerorum ad t pertinentium per p divisibilis.

(B) Sit t per nullum quadratum divisibilis vel formae $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$, denotantibus α_1, α_2, .. α_k numeros primos inter se diversos. Productum

$$\left\{a^{\alpha_1\alpha_2..\alpha_{k-1}} + a^{2\alpha_1\alpha_2..\alpha_{k-1}} + \ldots + a^{(\alpha_k-1)\alpha_1\alpha_2..\alpha_{k-1}}\right\}$$
$$+\left\{a^{\alpha_1..\alpha_{k-2}\alpha_k} + a^{2\alpha_1..\alpha_{k-2}\alpha_k} + \ldots + a^{(\alpha_{k-1}-1)\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}\alpha_k}\right\}$$
$$+\left\{a^{\alpha_1..\alpha_{k-3}\alpha_{k-1}\alpha_k} + a^{2\alpha_1..\alpha_{k-3}\alpha_{k-1}\alpha_k} + \ldots + a^{(\alpha_{k-2}-1)\alpha_1..\alpha_{k-3}\alpha_{k-1}\alpha_k}\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left\{a^{\alpha_2\alpha_3..\alpha_k} + a^{2\alpha_2\alpha_3..\alpha_k} + \ldots + a^{(\alpha_1-1)\alpha_2\alpha_3..\alpha_k}\right\},$$

denotante a numerum ad t pertinentem, summae omnium numerorum ad t pertinentium congruum fore ita intelligitur.

Quando productum hoc in summam evolvitur, habentur manifesto $(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)\ldots\alpha_k-1$ termini, quorum quisque formae est

$$a^{\psi\alpha_1\alpha_2..\alpha_{k-1} + \psi_1\alpha_1..\alpha_{k-2}\alpha_k + .. + \psi_{k-1}\alpha_2\alpha_3..\alpha_k}$$

Cujus potestatis exponens ad t primus erit, quoniam nullus horum $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_k$ metiri eum potest. Omnes igitur termini ad exp. t pertinent; omnes etiam incongruos esse, facile intelligitnr. Habentur igitur $(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)\ldots(\alpha_k-1)$ numeri ad t pertinentes, i. e. φt numeri, ex quo producto ille omnes ad t pertinentes numeri exhibentur.

Jam quisque factor producti, de quo agitur, est $\equiv -1$ (mod. p), ut facile perspicitur, ideoque est:

Summa numerorum ad t pertinentium $\equiv (-1)^k$.

q. e. d.

Scribebam Sundiae d. 27. M. Apr. 1845.

24.

Demonstratio nova theorematis Wilsoniani a summo Gauss hoc modo generalius enunciati:

„Productum omnium numerorum ad numerum quemcunque M pri-
„morum eoque inferiorum unitati negativae aut positivae sec. M. con-
„gruum est; et quidem negative sumenda est unitas, quando M potestas
„numeri primi imparis vel ejus duplum, vel denique 4, positive autem in
„omnibus casibus reliquis."

(*Auctore Friderico Arndt, Sundiae.*)

I. De modulo p^π vel $2p^\pi$, designante p numerum primum imparem.

Demonstratio prima.

In commentatione huic Diario inserta „Nova methodus determinandi multitudinem radicum congruentiae etc." argumentatus sum, pro modulo p^π vel $2p^\pi$ semper exstare radicem primitivam, qua designata per g, periodus

$$g, g^2, g^3, \ldots g^{p^{\pi-1}(p-1)}$$

involvet omnes numeros ad modulum primos eoque minores. Itaque productum horum numerorum congruum est potestati

$$g^{1+2+3+\ldots+\nu} = g^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)},$$

ubi designat ν numerum parem $p^{\pi-1}(p-1)$. Quia autem est $g^\nu \equiv 1$, $(g^{\frac{1}{2}\nu}+1)\,(g^{\frac{1}{2}\nu}-1) \equiv 0$ (mod. p^π vel $2p^\pi$) atque numeri $g^{\frac{1}{2}\nu}+1$, $g^{\frac{1}{2}\nu}-1$, utpote differentiam 2 constituentes, factorem p non simul involvunt, differentia denique $g^{\frac{1}{2}\nu}-1$ per modulum divisibilis esse nequit, necessario habetur $g^{\frac{1}{2}\nu} \equiv -1$, ideoque, quum $\nu+1$ sit impar, $g^{\frac{1}{2}\nu} \equiv -1$.

Eulerus quidem, nisi fallor, haec demonstrandi viam jam ingressus est, sed casus modo peculiaris rationem habuit, in quo numerus propositus est p.

Demonstratio secunda.

In commentatione „Demonstratio duorum theoremat. Gaussianis his generaliorum etc," probavi, productum numerorum ad eundem exponentem pertinentium sec. mod. p^n vel $2p^n$, unitati congruum esse, excepto casu, in quo $t = 2$.

Quodsi r, r', r'', etc. sunt omnes divisores numeri $p^{n-1}(p-1)$, numerorum ad modulum primorum eoque minorum nonnulli ad exp. r, nonnulli ad r', nonnulli ad r'', etc. pertinebunt. Quum jam productum ex numeris cujusque classis, excluso exponente 2, unitati congruum sit, ad exponentem 2 autem unus modo numerus, nempe -1 (i. e. p^n-1 vel $2p^n-1$), pertineat, manifesto productum omnium numerorum ad mod. primorum eoque inferiorum unitati negativae congruum est.

II.

Quando numerus propositus M est 4, habetur $1.3 \equiv -1$ (mod, 4).

III. De modulo 2^n, ubi $n > 2$.

Numeri ad eundem exponentem $t = 2^{n-m}$ pertinentes duabus periodis exhibentur

$$a, a^3, a^5, \ldots a^{t-1};$$
$$b, b^3, b^5, \ldots b^{t-1},$$

(*cf.* Comm. „Nova methodus determinandi etc."), ubi sunt a, b numeri ad t pertinentes, alter formae $2^m h + 1$, alter hujusce $2^m h - 1$.

Productum potestatum primae classis est $a^{1+3+5+\ldots(t-1)} = a^{\frac{1}{4}t.t}$, quo loco $\frac{1}{4}t$ integer, quando casum, in quo $t = 2$, excludimus. Est autem $a^t \equiv 1$ (mod 2^n), ergo etiam $a^{\frac{1}{4}t.t} \equiv 1$.

Simili modo productum potestatum secundae classis unitati congruum est.

Ad exp. 2 pertinent numeri $2^{n-1}-1, 2^{n-1}+1, 2^n-1$, quorum productum manifesto unitati congruum est.

Ergo propositionem hanc habemus:

Productum omnium numerorum imparium ad eundem exponentem sec. mod. 2^n pertinentium moduloquae inferiorum unitati congruum est.

Designantibus igitur $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_{n-2}$ producta numerorum ad exp. resp. $2^1, 2^2, 2^3, \ldots 2^{n-2}$

pertinentium, erit $\pi_1 \equiv 1$, $\pi_2 \equiv 1$, etc. $\pi_{n-2} \equiv 1$ (mod. 2^n), ergo

$$\pi_1 \, \pi_2 \, \pi_3 \, . \, . \, \pi_{n-2} \equiv 1 \text{ (mod. } 2^n),$$

i. e. productum omnium numerorum imparium infra modulum sitorum unitati congruum.

IV.

Sit $M = AB$, atque A, B numeri inter se primi. Jam quicunque numerus ad M primus summae $Ay + Bx$ sec. M congruus est, denotante y numerum ad B primum eoque minorem, x numerum ad A primum eoque minorem, quod quidem probavi in Comm. „Nova solutio problematis determinandi etc.“ Designatis igitur numeris ad A primis eoque minoribus per x_1, x_2, . . $x_{\varphi A}$; numeris ad B primis eoque minoribus per $y_1, y_2, . . y_{\varphi B}$, productum

$$\begin{array}{l} \{(Ay_1 + Bx_1) \, (Ay_1 + Bx_2) \ldots (Ay_1 + B\alpha_{\varphi A})\} \\ + \; \{(Ay_2 + Bx_1) \, (Ay_2 + Bx_2) \ldots (Ay_2 + Bx_{\varphi A})\} \\ + \; \{(Ay_3 + Bx_1) \, (Ay_3 + Bx_2) \ldots (Ay_3 + Bx_{\varphi A})\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \; \{(Ay_{\varphi B} + Bx_1) \, (Ay_{\varphi B} + Bx_2) \ldots (Ay_{\varphi B} + Bx_{\varphi A})\} \end{array}$$

congruum erit sec. mod. $M = AB$ producto numerorum ad M primorum eoque inferiorum. Designemus hoc productum per P.

Nunc habetur manifesto

$$\pi_1 = (Ay_1 + Bx_1) \; Ay_1 + Bx_2) \ldots (Ay_1 + Bx_{\varphi A})$$
$$\equiv B^{\varphi A} \, x_1 \, x_2 \, x_3 \, . \, . \, x_{\varphi A} \text{ (mod. } A);$$

atqui est ex theor. Fermat. $B^{\varphi A} \equiv 1$ (mod. A), ergo

$$\pi_1 \equiv \varepsilon \text{ (mod. } A), \text{ ubi } \varepsilon = x_1 \, x_2 \ldots x_{\varphi A}.$$

Ex eadem causa producta in reliquis seriebus horizontalibus posita numero ε sunt congrua, ex quo est

$$P \equiv \varepsilon^{\varphi B} \text{ (mod. } A).$$

Simili modo, ad series verticales spectans, habebis

$$P \equiv \varepsilon_1^{\varphi A} \text{ (mod. } B), \text{ ubi } \varepsilon_1 = y_1 \, y_2 \ldots y_{\varphi B}$$

V.

Resolvatur nunc M in factores primos hoc modo:

$$M = X^\xi \, Y^\eta \, Z^\zeta \text{ etc.}, = A. \; B. \; C. \text{ etc.}$$

sintque $x_1, x_2, . . x_{\varphi A}$ numeri ad A primi, $y_1, y_2, . . y_{\varphi B}$ ad B primi, z_1, z_2, . . $z_{\varphi C}$ ad C primi, etc. Quum jam sit ex antecedentibus $\varepsilon \equiv \pm 1$ (mod. A),

$\varepsilon_1 \equiv \pm 1$ (mod. B), atque φA, φB sint pares, habetur $P \equiv 1$ (mod. A), $P \equiv 1$ (mod. B), ideoque

$$P \equiv 1 \text{ (mod. } AB)$$

Quodsi ε_2 productum numerorum ad C primorum ad $z_1 z_2 \ldots z_{\varphi C}$ uque P_1 productum numerorum ad $A\,B\,C$ primorum, est ex IV et V: $P_1 \equiv P^{\varphi C}$ (mod. AB), $P_1 \equiv \varepsilon_2^{\varphi(AB)}$ (mod. C), i. e. $P_1 \equiv 1$ (mod. AB), $P \equiv 1$ (mod. C), ergo $P_1 \equiv 1$ (mod. ABC).

Porro sit ε_3 productum numerorum ad D primorum, P_2 productum numerorum ad $ABCD$ primorum, eritque $P_2 \equiv P^{\varphi D}$ (mod. ABC), $P_2 \equiv P_1^{\varphi(ABC)}$ (mod. D), ergo $P_2 \equiv 1$ (mod. ABC) $P_2 \equiv 1$ (mod. D), ideoque $P_2 \equiv 1$ (mod. $ABCD$).

Quoniam hoc modo progredi licet, sequitur productum numerorum ad M primorum eoque minorum, si M nullius formarum p^n, $2p^n$, 4, unitati congruum esse.

Scrib. Sundiae d. 28. M. April. 1845.

von fx, α, α_1, α_2, ... α_{n-1}, so folgt, dass $(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1}) \equiv (x-\alpha)(x-\alpha^p)\ldots(x-\alpha^{p^{n-1}})$ (mod. p,α) ist. Da sich aber jede symmetrische Function von $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots \alpha^{p^{n-1}}$ als ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte Function der Coefficienten von $(x-\alpha)(x-\alpha^p)\ldots(x-\alpha^{p^{n-1}})$ ansehen lässt (§. 1 Einl.), und da diese Coefficienten selbst ganzen reellen Zahlen, nämlich den Coefficienten von fx nach dem Modul (p,α) congruent zu setzen sind, so folgt, dass überhaupt alle symmetrischen Functionen von $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots \alpha^{p^{n-1}}$ nach dem Modul (p,α) reellen ganzen Zahlen congruent zu setzen sind. Offenbar sind aber die Coefficienten von $F(x,\alpha)$, $F(x,\alpha^p)$, $F(x,\alpha^{p^2})$, ... $F(x,\alpha^{p^{n-1}})$ symmetrische Functionen von $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots \alpha^{p^{n-1}}$ und mithin nach dem Modul (p,α) ganzen reellen Zahlen congruent zu setzen.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass sämmtliche Ausdrücke $F(x,\alpha)$, $F(x,\alpha^p)$, ... $F(x,\alpha^{p^{n-1}})$ verschiedene irreductible Ausdrücke nach dem Modul (p,α) sind. Verschieden sind aber zwei solche Ausdrücke schon, wenn in ihnen zwei entsprechende Coefficienten nach dem Modul (p,α) nicht congruent sind. Da $F(x,\alpha)$ mindestens einen Coefficienten enthalten soll, welcher der Congruenz $x^{p^{n_1}} - 1 \equiv 0$ (mod. p,α) nur genügt, wenn n_1 gleich n, oder einem Vielfachen dieser Zahl gleich wird, so mag ein solcher durch $\varphi\alpha$ bezeichnet werden. Nun werden aber die dem $\varphi\alpha$ entsprechenden Coefficienten in $F(x,\alpha^p)$, $F(x,\alpha^{p^2})$ ... $F(x,\alpha^{p^{n-1}})$ nach dem Modul (p,α) congruent $(\varphi\alpha)^p$, $(\varphi\alpha)^{p^2}$, ... $(\varphi\alpha)^{p^{n-1}}$ sein. Da diese Ausdrücke (§. 17.) nach dem Modul (p,α) verschieden sind, so sind auch sämmtliche Ausdrücke $F(x,\alpha)$, $F(x,\alpha^p)$, ... $F(x,\alpha^{p^{n-1}})$ nach diesem Modul verschieden. Wäre nun einer dieser Ausdrücke $F(x,\alpha^{p^k})$, wo k eine der Zahlen $2, 3, \ldots n-1$ bedeutet, nicht nach dem Modul (p,α) irreductibel, so setze man $F(x,\alpha^{p^k}) \equiv \psi(x,\alpha)$ $\psi_1(x,\alpha)$ (mod. p,α), wo $\psi(x,\alpha)$ und $\psi_1(,\alpha)$ Ausdrücke von x nach dem Modul (p,α) bedeuten. Setzt man nun in diese Congruenz statt α, den Ausdruck $\alpha^{p^{n-k}}$; so muss sie in eine andere, aber in sich richtige Congruenz übergehen;*) man erhält also $F(x,\alpha^{p^n}) \equiv \psi(x,\alpha^{p^{n-k}})\,\psi_1(x,\alpha^{p^{n-k}})$ (mod. p,α), und

*) Hat man nämlich zwei Ausdrücke von α, die nach dem Modul (p,α) congruent sind, so bleiben sie congruent, wenn man in ihnen statt α eine (p^m)te Potenz von α setzt, wo m irgend eine ganze Zahl bedeutet; oder, wenn $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p,α) ist, so ist auch $\varphi(\alpha^{p^m}) \equiv \psi(\alpha^{p^m})$ (mod. p,α). Es ist nämlich in §. 19. erwiesen worden, dass $(\varphi\alpha)^{p^m} \equiv (\varphi\alpha^{p^m})$ (mod. p,α) ist, und da aus obigen Con-

mithin, da $\alpha^{p^n} \equiv \alpha$ (mod. p, α), und daher auch $F(x, \alpha^{p^n}) \equiv F(x, \alpha)$ (mod. p, α) ist, $F(x,\alpha) \equiv \psi(x, \alpha^{p^{n-k}}) . \psi_1(x, \alpha^{p^{n-k}})$ (mod. p, α); welches gegen die vorausgesetzte Irreductibilität von $F(x, \alpha)$ streitet. Es ist folglich auch $F(x, \alpha^{p^k})$ irreductibel. Wollte man nun voraussetzen, $F(x,\alpha) F(x,\alpha^p) \ldots F(x,\alpha^{p^{n-1}})$ wäre nach dem Modul p nicht irreductibel, so setze man

$$F(x,\alpha)\; F(x,\alpha^p) \ldots F(x,\alpha^{p^{n-1}}) \equiv \psi x \, \psi_1 x \text{ (mod. } p, \alpha),$$

wo ψx und $\psi_1 x$ zwei Ausdrücke von x anzeigen, in deren Coefficienten α nicht eintritt. Da die linke Seite dieser Congruenz nur aus irreductiblen Ausdrücken besteht, so ist es nothwendig, dass das Product einer gewissen Anzahl dieser Ausdrücke dem ψx nach dem Modul (p, x) congruent werde. Es sei nun $\psi x = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots\ldots + a_s$, wo $a_0, a_1 \ldots a_s$ ganze Zahlen bedeuten, und jene Factoren seien $F(x,\alpha^{p^\mu})$, $F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu}})$, $F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu+\beta}})$, so hätte man $F(x,\alpha^{p^\mu}) \cdot F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu}}) \cdot F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu+\beta}}) \ldots \equiv a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots a_s$ (mod. p, α). In der Entwickelung des Products kann man sämmtliche Coefficienten als Ausdrücke von α^{p^μ} ansehen; bezeichnet man sie nach der Reihe durch $\varphi_0(\alpha^{p^\mu})$ $\varphi_1(\alpha^{p^\mu}), \ldots \varphi_s(\alpha^{p^\mu})$, so hätte man folgende Congruenzen:

$a_0 - \varphi_0(\alpha^{p^\mu}) \equiv 0$ (mod. p, α), $a_1 - \varphi_1(\alpha^{p^\mu}) \equiv 0$ (mod. p, α), $\ldots a_s - \varphi_s(\alpha^{p^\mu}) \equiv 0$ (mod. p, α). Es ist aber offenbar $a_0 - \varphi_0(\alpha^{p^\mu}) \equiv (a_0 - \varphi_0 \alpha)^{p^\mu}$ (mod. p, α) und daher auch $a_0 - \varphi_0 \alpha \equiv 0$ (mod. p, α), mithin $a_0 \equiv \varphi_0 \alpha$ (mod. p, α), und auf gleiche Weise erhält man $a_1 \equiv \varphi_1 \alpha$ (mod. p, α) $\ldots$ $a_s \equiv \varphi_s \alpha$ (mod. p, α). Bedeutet nun k die kleinste Zahl, welche nicht in μ, $\mu + \nu$, $\mu + \nu + \beta$ etc. enthalten ist, so erhält man $(a_0)^{p^k} \equiv (\varphi_0 \alpha)^{p^k}$ (mod. p, α) und daher $a_0 \equiv \varphi_0(\alpha^{p^k})$ (mod. p, α), und auf gleiche Weise $a_1 \equiv \varphi_1(\alpha^{p^k})$ (mod. p, α)

---

gruenz offenbar $(\varphi\alpha)^{p^m} \equiv (\psi\alpha)^{p^m}$ (mod. p, α) folgt, so muss auch $\varphi(\alpha^{p^m}) \equiv \psi(\alpha^{p^m})$ sein. Bedeuten nun $A(x, \alpha)$ und $B(x, \alpha)$ zwei nach dem Modul (p, α) congruente Ausdrücke von x, so muss auch $A(x, \alpha^{p^m}) \equiv B(x, \alpha^{p^m})$ sein, weil sich die Coefficienten beider Ausdrücke nur darin geändert haben, dass in ihnen α^{p^m} statt α, geschrieben worden ist. Hierbei sind also die entsprechenden Coefficienten nach dem Modul (p, α) wieder congruent geworden, und es ist demnach eine neue richtige Congruenz oder $A(x, \alpha^{p^m}) \equiv B(x, \alpha^{p^m})$ (mod. p, α) hervorgegangen. Man kann auch umgekehrt schliessen, wenn $\varphi(\alpha^{p^m}) \equiv \psi(\alpha^{p^m})$ (mod. p, α) ist, so muss auch $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p, α) sein. Da nämlich $\varphi(\alpha^{p^m}) - \psi(\alpha^{p^m}) \equiv (\varphi\alpha)^{p^m} - (\psi\alpha)^{p^m} \equiv (\varphi\alpha - \psi\alpha)^{p^m}$ (mod. p, α) ist, und mithin $\varphi\alpha - \psi\alpha$ mit $\varphi(\alpha^{p^m}) - \psi(\alpha^{p^m})$ nach dem Modul (p, α) congruent 0 werden muss, so muss auch $\varphi\alpha \equiv \psi\alpha$ (mod. p, α) sein. Bedeutet nun m_1 irgend eine andere ganze Zahl, so muss daher auch nach dem Obigen $\varphi(\alpha^{p^{m_1}}) \equiv \psi(\alpha^{p^{m_1}})$ (mod. p, α) sein, wenn $\varphi(\alpha^{p^m}) \equiv \psi(\alpha^{p^m})$ (mod. p, α) ist. Auf ähnliche Weise wie oben folgt ferner, dass, wenn $A(x, \alpha^{p^m}) \equiv B(x, \alpha^{p^m})$ (mod. p, α) ist, auch $A(x, \alpha^{p^{m_1}}) \equiv B(x, \alpha^{p^{m_1}})$ sein wird.

. . . $a_s \equiv \varphi_s(\alpha^{p^k})$; daher auch aus der oben angenommenen Congruenz (Vergl. die Anmerkung) die folgende: $F(x,\alpha^{p^k})\, F(x,\alpha^{p^{k+\nu}})\, F(x,\alpha^{p^{k+\nu+\beta}}) \ldots \equiv \varphi_0(\alpha^{p^k})\, x^s + \varphi_1(\alpha^{p^k})\, x^{s-1} + \ldots \varphi_s \alpha^{p^k}$ (mod. p,α). Setzt man in den letzten Ausdruck die den Coefficienten congruenten Werthe a_0, a_1, a_2, ... a_s, so findet man die Congruenz

$F(x,\alpha^{p^\mu})\, F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu}})\, F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu+\beta}}) \ldots \equiv F(x,\alpha^{p^k})\, F(x,\alpha^{p^{k+\nu}})\, F(x,\alpha^{p^{k+\nu+\beta}}) \ldots$ (mod. p,α). Hiernach müsste aber $F(x,\alpha^{p^k})$ mit einem der Factoren $F(x,\alpha^{p^\mu})$ $F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu}})$, $F(x,\alpha^{p^{\mu+\nu+\beta}})$ etc. congruent sein: da dies nach dem Vorhergehenden nicht möglich ist, so entsteht ein Widerspruch, der nur dadurch gehoben werden kann, dass der Ausdruck $F(x,\alpha)\, F(x,\alpha^p)\, F(x,\alpha^{p^2}) \ldots F(x,\alpha^{p^{n-1}})$ nach dem Modul p irreductibel wird.

§. 43.

Lehrsatz. Bedeutet $Gx \equiv 0$ (mod. p) eine irreductible Congruenz vom $(m.n)^{\text{ten}}$ Grade, wo m und n ganze Zahlen bedeuten, und α eine Wurzel der Gleichung $Gx = 0$; ferner $r\alpha$ eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^{m.n}} - 1 \equiv 0$ (mod. p,α), und setzt man $(r\alpha)^{\frac{p^{mn}-1}{p^m-1}} = t\alpha$, so ist $(x - t\alpha)$ $(x-(t\alpha)^p) \ldots\ldots (x-(t\alpha)^{p^{m-n}})$ ein Ausdruck, dessen Coefficienten nach dem Modul (p,α) ganzen reellen Zahlen congruent werden, und der, wenn man diese Zahlen statt jener Coefficienten substituirt, nach dem Modul p irreductibel ist.

Beweis. Da $(t\alpha)^{p^m-1} \equiv (r\alpha)^{p^{mn}-1}$ (mod. p,α) ist, so folgt aus (§. 18.) $t\alpha^{p^m-1} \equiv$ (mod. $p,\alpha)^{p^m} \equiv (t\alpha)$ (mod. p,α). Entwickelte man nun einen Ausdruck, dessen Wurzeln die p^{ten} Potenzen der Wurzeln von $(x - (t\alpha)^p) \ldots\ldots$ $(x - (t\alpha)^{p^{m-1}})$ sind, so folgt, dass derselbe mit $(x-t\alpha)\, (x-(t\alpha)^p) \ldots (x-(t\alpha)^{p^{m-n}})$ nach dem Modul (p,α) congruent sein werde. Andrerseits weiss man aber, dass die Coefficienten des Ausdrucks, dessen Wurzeln die p^{ten} Potenzen der Wurzeln jenes Ausdruckes sind, den p^{ten} Potenzen der entsprechenden Coefficienten desselben congruent sein werden (§. 13. *No.* 2.). Setzt man nun $(x - t\alpha)\, (x - (t\alpha)^p) \ldots\ldots (x-(t\alpha)^{p^{m-1}}) \equiv x^m + \varphi_1\alpha . x^{m-1} + \varphi_2\alpha . x^{m-2} + \ldots + \varphi_m\alpha$, so folgt, dass $(\varphi_1\alpha)^p \equiv \varphi_1\alpha$ (mod. p,α) sei. Bezeichnet aber g eine primitive Wurzel von der Congruenz $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p), so folgt, da

nach obiger Congruenz $\varphi_1\alpha(\varphi_1\alpha^{p-1}-1)\equiv 0$ (mod. p,α) ist, dass $\varphi_1\alpha$ $(\varphi_1\alpha-g)(\varphi_1\alpha-g^2)\ldots(\varphi_1\alpha-g^{p-1})\equiv 0$ (mod. p,α) sein müsse. Es muss mithin $\varphi_1\alpha$ einer der Zahlen $0, g, g^2, \ldots g^{p-1}$ nach dem Modul (p,α) congruent werden. Ebenso kann man zeigen, dass jeder der folgenden Coefficienten einer dieser Zahlen congruent werden müsse. Um den andern Theil des Satzes zu zeigen, bemerke man zuerst, dass $t\alpha$, $(t\alpha)^p$, $(t\alpha)^{p^2}$, ... $(t\alpha)^{p^{m-1}}$ sämmtlich primitive Wurzeln der Congruenz $x^{p^m-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) sein werden. Da nämlich $t\alpha$ gleich $(r\alpha)^{\frac{p^{mn}-1}{p^m-1}}$ und $r\alpha$ primitive Wurzel von $x^{p^{mn}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) ist, so muss $t\alpha$ offenbar primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^m-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) sein. Die übrigen Ausdrücke $(t\alpha)^p, (t\alpha)^{p^2}, \ldots (t\alpha)^{p^{m-1}}$ müssen primitive Wurzeln derselben Congruenz sein, weil $p, p^2, \ldots p^{m-1}$ relative Primzahlen zu p^m-1 sind. Wollte man annehmen, $(x-t\alpha)(x-(t\alpha)^p)(x-(t\alpha)^{p^2})\ldots(x-t\alpha)^{p^{m-1}})$ hätte nach dem Modul p irgend einen irreductibeln Factor vom Grade m^1, wo $m^1<m$ ist, so müsste der Ausdruck, dessen Wurzeln die $(p^{m_1}-1)$ten Potenzen der Wurzeln von $(x-t\alpha)(x-(t\alpha)^p)\ldots(x-(t\alpha)^{p^{m-1}})$ sind, für $x=1$ congruent 0 (mod. p) werden (§. 36. Zus.). Setzt man also $p^{m_1}-1=q$, so müsste $(1-(t\alpha)^q)(1-(t\alpha)^{qp})\ldots(1-t\alpha)^{qp^{m-1}})\equiv 0$ (mod. p,α) sein. Es müsste mithin einer der Factoren auf der linken Seite $\equiv 0$ (mod. p,α) werden. Bezeichnet nun k einen der Werthe $0, 1, 2 \ldots m-1$, so müsste ein Ausdruck von der Form $1-(t\alpha)^{q.p^k}\equiv 0$ (mod. p,α) werden. Da aber $(t\alpha)^{p^k}$ eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^m-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) ist, so kann, indem $q=p^{m_1}-1$, und $p^{m_1}-1$ kleiner als p^m-1 ist, diese Congruenz nicht Statt finden, und der obige Ausdruck muss daher irreductibel sein.

Zusatz. Wenn daher in Bezug auf den Modul p eine irreductible Congruenz vom Grade mn existirt, so kann man in Bezug auf denselben Modul auch eine irreductible Congruenz vom Grade m und ebenso vom Grade n aufstellen.

§. 44.

Lehrsatz. Es giebt irreductible Congruenzen von jedem Grade nach dem Modul p, wenn p eine Primzahl ist.

Beweis. Es soll zuerst bewiesen werden, dass es irreductible Congruenzen von solchen Graden gebe, die Potenzen von p sind.

Um zu beweisen, dass es irreductible Congruenzen vom Grade p gebe, setze man $p^p = p_1$, und es wird behauptet, dass $\frac{x^{p_1-1}-1}{x^{p-1}-1}$ in lauter irreductible Factoren vom Grade p zerfället werden könne. Setzt man nämlich voraus, der Ausdruck habe in Bezug auf den Modul p den Factor fx, so dass also $\frac{x^{p_1-1}-1}{x^{p_1-1}-1} = fx.Qx + pRx$ ist, wo Qx und Rx Ausdrücke von x bedeuten, so folgt leicht aus dieser Gleichung, dass, wenn α eine Wurzel von fx ist, $\alpha^{p_1-1}-1 \equiv 0$ (mod. p, α) sein werde. Hiernach kann also der Grad von fx nicht grösser als p_1 oder als p^p sein. (§. 17.). Wäre nun fx vom Grade n, so wäre auch $\alpha^{p^n-1}-1 \equiv 0$ (mod. p, α) (§. 18.). Daraus folgt leicht, dass, wenn k der grösste gemeinschaftliche Theiler von p^p-1 und p^n-1 ist, auch $\alpha^k \equiv 1$ (mod. p, α) sein müsse. Da aber p und n nur den Factor p oder 1 gemeinschaftlich haben können, so muss der grösste gemeinschaftliche Theiler von p^p-1 und p^n-1 entweder p^p-1 oder $p-1$ sein (Vergl. die Anmerkung zu §. 48.). Kann der zweite Fall nicht Statt finden, so muss der erste in Erfüllung gehen, d. h. p^n-1 muss den Factor p^p-1 in sich schliessen; woraus dann folgt, dass $n = p$ sein muss. Fände aber der zweite Fall Statt, so hätte man $\alpha^{p-1} - \equiv 0$ (mod. p, α) und mithin $n = 1$: es müsste mithin der Ausdruck $\frac{x^{p_1-1}-1}{x^{p-1}-1}$ irgend einen Factor vom 1ten Grade haben, oder für irgend einen Zahlwerth von x congruent 0 (mod. p) werden. Es ist aber $p_1 - 1 = p^p - 1 = (p-1)(p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+1)$, oder, wenn man $p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+1 = s$ setzt, so ist $p_1-1 = (p-1)s$, mithin

$$\frac{x^{p_1-1}-1}{x^{p-1}-1} = \frac{x^{(p-1)s}-1}{x^{(p-1)}-1} = x^{(p-1)(s-1)} + x^{(p-1)(s-2)} + \ldots + x^{(p-1)\cdot 1} + 1.$$

Setzt man hier für x irgend einen Zahlenwerth, so wird der Ausdruck congruent s (mod. p), da jedes Glied in ihm congruent 1 wird. Es ist aber offenbar $s \equiv 1$ (mod. p); $\frac{x^{p_1-1}-1}{x^{p-1}-1}$ kann mithin keinen Factor vom 1ten Grade enthalten, und muss folglich in lauter Factoren vom Grade p zerfallen.

Auf ähnlichem Wege kann gezeigt werden, dass es irreductible Congruenzen vom Grade p^2, und überhaupt von jedem Grade gebe, der einer Potenz von p gleich ist. Es wird genügen, dies noch einmal kurz

für den Grad p^2 durchzuführen. Man setze also $p^p = p_1$, $p^{p^2} = p_2$, so wird behauptet, dass der Ausdruck $\frac{x^{p_2-1}-1}{x^{p_1-1}-1}$ nur irreductible Factoren vom Grade p^2 in sich schliessen könne. Setzt man nämlich voraus, fx wäre ein Factor dieses Ausdrucks und α eine Wurzel von fx, so erhielte man wieder $\alpha^{p_2-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α). Da nun $p_2 = p^{p^2}$, so kann der Grad von fx diese Zahl nicht überschreiten. Ist nun fx vom Grade n, so hat man auch $\alpha^{p^n-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α). Bedeutet ferner k den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen n und p^2, so ist auch p^k-1 der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen $p^{p^2}-1$ und p^n-1 (Vergl. d. Anm. zu §. 48.) und mithin auch $\alpha^{p^k-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α); hiernach muss k mit n zusammenfallen (§. 17.); d. h. es muss n ein Theiler von p^2 sein. Wenn mithin der Grad von fx nicht p^2 sein sollte, so müsste er 1 oder p sein. In beiden Fällen müsste α, oder die Wurzel von fx, der Congruenz $\alpha^{p_1-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) genügen. Wird also nachgewiesen, dass α dieser Congruenz nicht genügt, so ist fx vom Grade p^2. Es ist aber $p_2-1 = p_1^p-1 = (p_1-1)(p_1^{p-1}+p_1^{p-2}+\ldots+1)$. Setzt man wieder $p_1^{p-1}+p_1^{p-2}+\ldots+1 = s$, so ist $\frac{x^{p_2-1}-1}{x^{p_1-1}-1} = \frac{x^{(p_1-1)s}-1}{x^{(p_1-1)}-1} = x^{(p_1-1)(s-1)}+x^{(p_1-1)(s-2)}+\ldots+1$. Setzt man mithin in diesen Ausdruck statt x einen Werth α, welcher der Congruenz $x^{p_1-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) genügt, so wird derselbe offenbar nach dem Modul (p,α) congruent s, und da s congruent 1 ist, so wird er offenbar $\equiv 1$ (mod. p,α). $\frac{x^{p_2-1}-1}{x^{p_1-1}-1}$ kann mithin keinen Factor vom Grade 1 oder vom Grade p haben, und muss folglich lauter irreductible Factoren vom Grade p^2 in sich schliessen.

Setzt man $p^{p^n} = p_n$ und $p^{p^{n-1}} = p_{n-1}$, so lässt sich auf gleiche Weise zeigen, dass $\frac{x^{p_n-1}-1}{x^{p_{n-1}-1}-1}$ aus lauter irreductiblen Factoren vom Grade p^n zusammengesetzt sei.

Man setze nun voraus, der Satz sei für alle Grade bewiesen, welche kleiner als lp^n sind, wo l eine Zahl bedeutet, die nicht durch p aufgeht, und er solle auch für den Grad lp^n bewiesen werden, so setze man $l = a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$, wo $a, b, c, \ldots$ Primzahlen sind und $a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1}\ldots(a-1)(b-1)(c-1)\ldots = A$: so ist offenbar $A < l$, und es wird daher irreductible Con-

gruenzen vom Grade $p^n A$ geben. Man setze nun, α sei eine Wurzel solcher Congruenz, mache $P = p^{p^n A}$, und bestimme $r\alpha$ als primitive Wurzel der Congruenz $x^{P-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α), so wird die Congruenz $x^l - r\alpha$ irreductibel sein, weil l ein Theiler von $P-1$ oder von $p^{A p^n} - 1$ ist; wovon man sich leicht überzeugt, wenn man für A seinen Werth $a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}\, c^{\gamma-1} \ldots (a-1)\,(b-1)\,(b-1)\ldots$ setzt.*) (§. 41.). Bildet man nun das Product

$$(x^l - r\alpha)\,(x^l - (r\alpha)^p)\,(x^l - (r\alpha)^{p^2})\ldots(x^l - (r\alpha)^{p^{p^n A-1}})$$

so ist dies ein irreductibler Ausdruck vom Grade $l.A.p^n$ (§. 42.). Da aber lp^n ein Factor dieser Zahl ist, so muss es auch irreductible Congruenzen vom Grade lp^n geben (§. 43.), wenn es irreductible Congruenzen jeden Grades giebt, der kleiner als lp^n ist.

Da es nun nach jeder Primzahl irreductible Congruenzen vom 1ten Grade giebt, so folgt jetzt leicht, dass es nach jeder Primzahl irreductible Congruenzen von jedem Grade gebe.

§. 45.

Bedeutet $\varphi\alpha$ einen Ausdruck von α, und n_1 die kleinste Zahl, welche der Congruenz $x^{p^{n_1}-1} - 1 \equiv 0$ (p, α) genügt; so gehören die Coefficienten des Ausdrucks $(x - \varphi\alpha)\,(x - \varphi(\alpha^p))\,(x - \varphi(\alpha^{p^2}))\ldots(x - \varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ sämmtlich zum Modul p, sind also nach dem Modul (p, α) ganzen reellen Zahlen congruent zu setzen, und der Ausdruck $(x - \varphi(\alpha))\,(x - \varphi(\alpha^p))\ldots(x - \varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ muss, wenn dies geschehen, nach dem Modul p irreductibel sein.

Die erste Aussage ergiebt sich aus §. 16., weil leicht folgt, dass der Ausdruck, dessen Wurzeln die pten Potenzen der Wurzeln von $(x - \varphi\alpha)$ $(x - \varphi(\alpha^p))\ldots(x - \varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ sind, diesem Ausdrucke nach dem Modul (p, α) congruent ist. Die zweite Aussage folgt aus der Annahme, dass n_1 die kleinste Zahl sei, welche der Congruenz $x^{p^{n_1}-1} - \equiv 0$ (mod. p, α) genügt, dass mithin der Ausdruck für die $(p^m - 1)$ten Potenzen der Wurzeln von $(x - \varphi\alpha))$ $(x - \varphi(\alpha^p))\ldots(x - \varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$, wenn man statt x den Werth 1 setzt, nicht $\equiv 0$ (mod. p, α) werden kann, so lange $m < n_1$ ist (§. 37.). Aus § 12. folgt übrigens, dass n_1 oder der Grad von $(x - \varphi(\alpha))\,(x - \varphi(\alpha^p))\ldots(x - \varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ ein Theiler von n oder von der Zahl sein müsse, welche den Grad des irre-

*) Siehe Disquisitiones arithmeticae §. 92. Pag. 90.

ductibeln Ausdrucks von x angiebt, von welchem α eine Wurzel ist. Bedeutet nun $\psi\alpha$ einen Ausdruck, der keinem der Ausdrücke $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha^p)$, ... $\varphi(\alpha^{p^{n_1-1}})$ congruent ist, und m_1 die kleinste Zahl, welche der Congruenz $(\psi\alpha)^{p^{m_1}-1}-1 \equiv 0$ (mod. p,α) genügt, so wird auch $(x-\psi\alpha)(x-\psi(\alpha^p))\ldots(x-\psi(\alpha^{p^{m_1-1}}))$ ein zum Modul p gehöriger irreductibler Ausdruck von x sein, der aber von $(x-\varphi\alpha)(x-\varphi(\alpha^p))\ldots(x-\varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ nach diesem Modul verschieden sein muss, weil offenbar beide Ausdrücke nach dem Modul (p,α) verschieden sind, da sie in Bezug auf diesen Modul aus verschiedenen Factoren zusammengesetzt sind. — Alle Ausdrücke von x, die auf ähnliche Weise wie $(x-\varphi\alpha)(x-\varphi(\alpha^p))\ldots(x-\varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ gebildet sind, müssen nun in Bezug auf den Modul p Divisoren von $x^{p^n-1}-1$ sein. Da nämlich sämmtliche Wurzeln von $(x-\varphi(\alpha))(x-\varphi(\alpha^p))\ldots(x-\varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ unter einander verschieden sind und zugleich der Congruenz $x^{p^n-1}-1 \equiv 0$ (mod. p,α) genügen, so folgt, dass $x^{p^n-1}-1$ in Bezug auf den Modul (p,α) den Factor $(x-\varphi)\alpha))(x-\varphi(\alpha^p))\ldots(x-\varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ haben werde (§. 20. *No.* 9.). Setzt man also $(x-\varphi\alpha)(x-\varphi(\alpha^p))\ldots\ldots(x-\varphi(\alpha^{p^{n_1-1}})) \equiv x^{n_1}+a_1x^{n_1-1}+a_2x^{n_1-2}+\ldots\ldots a_n+pF(x,\alpha)$, wo $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ganze Zahlen sind und $F(x,\alpha)$ einen zum Modul (p,α) gehörigen Ausdruck von x darstellt, so müssen die Normen von $x^{n_1}+a_1x^{n_1-1}+a_2x^{n_1-1}+\ldots\ldots+a_n+pF(x,\alpha)$ und von $x^{n_1}+a_1x^{n_1-1}+a_2x^{n_1-2}+\ldots a^n$ in Bezug auf $x^{p^n-1}-1$ offenbar nach dem Modul (p,α) congruent sein. Da der erste Ausdruck ein Divisor von $x^{p^n-1}-1$ ist, so müssen diese Normen in Bezug auf den Modul (p,α) congruent 0 werden. Offenbar ist aber die Norm von $x^{n_1}+a_1x^{n_3-1}+a_2x^{n_1-2}+\ldots+a_n$ in Bezug auf $x^{p^n-1}-1$ eine ganze Zahl: soll diese nach dem Modul (p,α) congruent 0 sein, so muss sie auch nach dem Modul p congruent 0 sein; wird aber die Norm congruent 0, so ist auch (§. 11.) der irreductible Ausdruck $x^{n_1}+a_1x^{n_1-1}+a_2x^{n_1-2}+\ldots a_n$ in Bezug auf den Modul p ein Factor von $x^{p^n-1}-1$. Da nun die sämmtlichen p^n-1 Ausdrücke von α, die nicht congruent 0 (mod. p,α) zu setzen sind, die sämmtlichen Wurzeln von $x^{p^n-1}-1$ sind, so folgt, dass sich immer n_1 dieser Wurzeln, wo n_1 ein Factor von n ist, in einen zu dem Modul p gehörigen irreductibeln Ausdruck von x vereinigen. Es kann mithin $x^{p^n-1}-1$ nur solche irreductible Ausdrücke von x zu Facto-

ten nach dem Modul p haben, deren Grad in n aufgeht. Andrerseits lässt sich behaupten, dass alle irreductibeln einfachen Ausdrücke von x, deren Grad in n aufgeht, Factoren von $x^{p^n-1}-1$ in Bezug auf den Modul p sind. Setzt man nämlich $n = n_1 n_2$ und n_1 und n_2 als ganze Zahlen voraus, ferner φx als einen einfachen irreductibeln Ausdruck vom Grade n_1, und β als eine Wurzel von φx, so erhält man (§. 18.) $\beta^{p^{n_1}-1} \equiv 1$ (mod. p,β), und mithin, da bekanntlich $p^{n_1}-1$ in $p^{n_1 n_2}-1$ aufgeht, auch $\beta^{p^{n_1 n_2}-1}-1$ oder $\beta^{p^n-1}-1 \equiv 0$ (mod. p,β), und daher (§. 14: *No.* 2) φx als Factor von $x^{p^n-1}-1$ in Bezug auf den Modul p. Hieraus folgt:

Dass jeder irreductible Ausdruck, welcher nach dem Modul p ein Divisor von $x^{p^n-1}-1$ ist, einem Ausdrucke von der Form $(x-\varphi(\alpha))(x-\varphi(\alpha^p)) \ldots\ldots (x-\varphi(\alpha^{p^{n_1-1}}))$ in Bezug auf den Modul (p,α) congruent gesetzt werden könne.

§. 46.

Aufgabe. Die Anzahl der irreductibeln Congruenzen vom Grade n nach dem Modul p zu bestimmen, wenn n eine Primzahl ist.

Auflösungen. Da es irreductible Congruenzen jeden Grades nach dem Modul p giebt, (§. 44.), so sei $fx \equiv 0$ (mod. p) eine solche vom n^{ten} Grade und α eine Wurzel von fx. Im Ganzen giebt es p^n-1 verschiedene Reste nach dem Modul (p,α), welche nicht $\equiv 0$ mod. p,α) sind. Da nun n keinen Theiler ausser 1 hat, so ist jeder dieser Reste entweder als die Wurzel einer irreductibeln Congruenz vom n^{ten} Grade, oder vom ersten Grade, zu betrachten. Es können aber nur die $p-1$ Reste oder Ausdrücke von α auf Congruenzen vom ersten Grade führen, in welchen die Coefficienten der Potenzen von α, welche den 0ten Grad überschreiten, congruent 0 werden (§. 12. nebst Zus.). Dergleichen Ausdrücke giebt es aber offenbar nur $p-1$, nämlich $1, 2, \ldots\ldots p-1$. Mithin giebt es $p^n-1-(p-1) = p(p^{n-1}-1)$ Ausdrücke von α, die zu irreductiblen Congruenzen vom Grade n nach dem Modul p führen. Da von diesen je n als Wurzeln zu einer Congruenz vom n^{ten} Grade gehören, so giebt es offenbar $p\left(\frac{p^{n-1}-1}{n}\right)$ einfache irreductible Congruenzen vom n^{ten} Grade.

Anmerkung. Bedeutet z irgend eine ganze Zahl, so folgt, dass der Ausdruck, von welchem $z+x$ eine Wurzel ist, oder $(x-z-\alpha)(x-z-\alpha_1)\ldots(x-z-\alpha_{n-1})$,

wo $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ die Wurzeln von fx bedeuten, ebenfalls irreductibel und vom $n$ten Grade sein werde. (§. 12. nebst Zus.) Stellt man sich dem z die p Werthe $0, 1, 2, \ldots p-1$ zugelegt und die entsprechenden Ausdrücke für $z+\alpha$ entwickelt vor, so wird der erste Coefficient dieser p Ausdrücke, wie leicht zu ersehen, den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-1$ nach dem Modul p congruent werden, wenn n nicht mit p aufgeht: hingegen einer und derselben Zahl congruent bleiben, wenn n mit p aufgeht. Bedeutet nun φx einen Ausdruck von x, der nicht unter den p Ausdrücken vorkommt, welche $z+\alpha$ als Wurzel enthalten, wenn man dem z die p Werthe $0, 1, 2, \ldots p-1$ zulegt, und β eine Wurzel von φx, so werden die p Ausdrücke, welche $z+\alpha$ als Wurzeln enthalten, von den p Ausdrücken, welche $z+\beta$ als Wurzel enthalten, verschieden sein müssen: denn wollte man voraussetzen, dass die Ausdrücke für $z_1+\alpha$ und $z_2+\beta$ congruent wären, wo z_1 und z_2 irgend zwei der Zahlen $0, 1, 2 \ldots p-1$ bedeuten, so müssten auch die Ausdrücke für α und $z_2-z_1+\beta$ congruent sein; was offenbar gegen die Voraussetzung ist, da z_2-z_1 ebenfalls den Zahlen $0, 1, 2 \ldots$ angehört. Hieraus geht der Satz hervor: dass die Anzahl sämmtlicher irreductibler Congruenzen von irgend einem Grade, der nicht mit p aufgeht, das $p$fache von der Anzahl der irreductibeln Congruenzen desselben Grades sein müsse, deren erster Coefficient einer bestimmten Zahl, etwa 0, congruent ist. Da mithin die Anzahl sämmtlicher irreductibler Congruenzen vom Grade n gleich $p\left(\frac{p^{n-1}-1}{n}\right)$ ist, so muss die Anzahl der irreductibeln Congruenzen von demselben Grade, deren erster Coefficient $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, $\frac{p^{n-1}-1}{n}$ sein, wenn n eine andere Primzahl als p bedeutet. Der *Fermat*'sche Satz erhält demnach eine eigenthümliche Beleuchtung, indem dadurch nicht allein ausgesprochen wird, dass $\frac{p^{n-1}-1}{n}$ eine ganze Zahl sei, sondern auch die unmittelbare Bedeutung dieser ganzen Zahl nachgewiesen wird, wenn n eine Primzahl ist.

§. 47.

Aufgabe. Die Anzahl der irreductiblen Congruenzen vom Grade n zu bestimmen, wenn n eine Primzahl und ν eine ganze Zahl bedeutet.

Auflösung. Es sei $fx \equiv 0 \pmod{p}$ eine irreductible Congruenz

vom Grade n^ν α eine Wurzel von fx, $r\alpha$ eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p^{n^\nu}} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α) und $\beta = \alpha^{\frac{p^{n^\nu}-1}{p^{n^{\nu-1}}-1}}$, so wird es $p^{n^\nu}-1$ Ausdrücke von α geben, die nicht $\equiv 0$ (mod. p, α) sind, hingegen $p^{n^{\nu-1}}-1$ Ausdrücke von β, (β hängt nur von einer Congruenz $(n^{\nu-1})$ten Grades ab (§. 43.)), die nicht congruent 0 sind. Die sämmtlichen Ausdrücke von α realisiren die Congruenz $x^{p^{n^\nu}-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α), diejenigen aber unter ihnen, welche sich als Wurzeln von irreductibeln Congruenzen niedrigeren Grades als des $n$ten ansehen lassen, sind jedenfalls von einem Grade, der sich durch n^{ν_1} darstellen lässt, wo $\nu_1 < \nu$ ist, und genügen mithin der Congruenz $x^{p^{n^{\nu_1}}-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α), folglich (da ν^{ν_1} jedenfalls ein Factor von $n^{\nu-1}$ sein muss) auch der Congruenz $x^{p^{n^{\nu-1}}-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p, α). Aber die sämmtlichen Ausdrücke von β stellen alle Ausdrücke von α dar, welche dieser Congruenz genügen: zieht man also von der Anzahl der Ausdrücke von α die Anzahl der Ausdrücke von β ab, so behält man diejenigen Ausdrücke übrig, welche erst in der Potenz $p^{n^\nu} - 1$ congruent 1 nach dem Modul (p, α) werden, und welche also die Wurzeln der irreductibeln Ausdrücke von x nach dem Modul p vom Grade n^ν darstellen. Ihre Anzahl beträgt mithin $(p^{n^\nu}-1) - (p^{n^{\nu-1}}-1)$ oder $p^{n^{\nu-1}}(p^{n^{\nu-1}(n-1)}-1)$. Da aber je n^ν Ausdrücke α in eine Congruenz vom Grade n^ν eingehen, so wird die Anzahl der irreductibeln Congruenzen vom Grade n^ν nach dem Modul p stets durch

$p^{n^{\nu-1}}\left(\frac{p^{n^{\nu-1}(n-1)}-1}{n^\nu}\right)$ ausgedrückt.

§. 48.

Aufgabe. Die Anzahl der irreductiblen Congruenzen vom Grade $A^a B^b C^c D^d$ zu bestimmen, wenn A, B, C, D Primzahlen und a, b, c, d ganze positive Zahlen sind.

Die Schlüsse sollen an den vier Primzahlen A, B, C, D so geführt werden, dass zu sehen: sie, so wie die durch sie abgeleiteten Formeln, gelten allgemein.

Auflösung. Man setze $A^a B^b C^c D^d = n$ und $p^{A^{a-1} B^{b-1} C^{c-1} D^{d-1}} = P$, so wird die Anzahl derjenigen Ausdrücke von α, welche der Congruenz

$x^{p^{n_1}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) nicht genügen, wenn $n_1 < A^a B^b C^c D^d$ ist, durch die Formel $P^{ABCD}-P^{ABC}-P^{ABD}-P^{ACD}-P^{BCD}+P^{AB}+P^{AC}+P^{AD}+P^{BC}+P^{BD}+P^{CD}-P^{A}-P^{B}-P^{C}-P^{D}+P$ ausgedrückt. Das Bildungsgesetz ist leicht ersichtlich. Die Anzahl der gesuchten Congruenzen erhält man wenn man diesen Ausdruck durch $A^a B^b C^c D^d$ dividirt; sie ist daher gleich $\{P^{ABCD}-P^{ABC}-P^{ABD}-P^{ACD}-P^{BCD}+P^{AB}+P^{AC}+P^{AD}+P^{BC}+P^{BD}+P^{CD}-P^{A}-P^{B}-P^{C}-P^{D}+P\}\frac{1}{A^a B^b C^c D^d}$.

Beweis. Zunächst bemerke man, dass sich der erste oben angegebene Ausdruck nicht ändert, wenn man jedes Glied um 1 verringert. Er geht nämlich alsdann in $(P^{ABCD}-1)-(P^{ABC}-1)-(P^{ABD}-1)-(P^{ACD}-1)-(P^{BCD}-1)+(P^{AB}-1)+(P^{AC}-1)+(P^{AD}-1)+(P^{BC}-1)+(P^{BD}-1)+(P^{CD}-1)-(P^{A}-1)-(P^{B}-1)-(P^{C}-1)-(P^{D}-1)+(P-1)$ über, welcher Ausdruck, ausser dem ersten, offenbar noch $1-4+\frac{4.3}{1.2}-\frac{4.3.2}{1.2.3}+1$ Einheiten enthält. Da aber dieser Zahlenausdruck gleich $(1-1)^4$ und mithin 0 ist, so kann man den ersten Ausdruck auch in der angeführten Gestalt schreiben. Nun giebt $P^{ABCD}-1$ die Anzahl der Wurzeln von $x^{p^{A^a B^b C^c D^d}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) an; ferner $P^{ABC}-1$ die Anzahl der Wurzeln von $x^{p^{A^{a-1}B^{b-1}C^{c-1}D^{d-1}}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) etc. bis endlich $P-1$ die Anzahl der Wurzeln von $x^{p^{A^{a-1}B^{b-1}C^{c-1}D^{d-1}}-1}-1$ angiebt. Jeder Ausdruck von α, der nicht congruent 0 (mod. p,α) wird, ist nun in der Anzahl $P^{ABCD}-1$ durch die folgenden Ausdrücke $-(P^{ABC}-1)-(P^{ABD}-1)-$ etc. mitgerechnet, wird aber zu der Anzahl derjenigen Ausdrücke von α, welche der Congruenz $x^{p^{n_1}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) genügen, wenn $n_1 < A^a B^b C^c D^d$ ist, und auf 0 reducirt, indem die Anzahl derjenigen Ausdrücke von α, welche jener Congruenz nur genügen, wenn $n_1 = A^a B^b C^c D^d$ wird, durch die folgenden Ausdrücke unverändert bleibt. Es muss nämlich jeder Ausdruck von α, welcher der Congruenz genügt, $x^{p^{n_1}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), wenn $n_1 < A^a B^b C^c D^d$ ist, einer der folgenden Congruenzen genügen: $x^{p^{A^{a-1}B^b C^c D^d}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), $x^{p^{A^a B^{b-1} C^c D^d}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), $x^{p^{A^a B^b C^{c-1} D^d}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), $x^{p^{A^a B^b C^c D^{d-1}}-1}-1\equiv 0$ (mod.

p,α). Hier ist zu unterscheiden, ob er einer, zweien, dreien oder allen vieren dieser Congruenzen zu gleicher Zeit genüge. 1) Gesetzt, der Ausdruck genügte nur einer der Congruenzen z. B. $x^{p^{A^aB^bC^cD^{d-1}}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) oder $x^{p^{ABC}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), so ist er in jener obigen allgemeinen Formel mitgezählt, in den beiden Gliedern $(P^{ABCD}-1)-(P^{ABC}-1)$ nur, in übrigen nicht; und da er in beiden Gliedern mit entgegengesetzten Vorzeichen mitgezählt ist, so fällt er in der allgemeinen Formel ganz aus.

2) Gesetzt, der Ausdruck genügte den beiden Congruenzen $x^{p^{ABC}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) und $x^{p^{ABD}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), so muss er auch der Congruenz $x^{p^{AB}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) genügen, weil $P^{AB}-1$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $P^{ABC}-1$ und $P^{ABD}-1$ ist. Es ist mithin der Ausdruck in der obigen allgemeinen Formel in den Gliedern $(P^{ABCD}-1)-(P^{ABC}-1)-(P^{ABD}-1)+(P^{AB}-1)$ mitgezählt; mithin $1-2+1=(1-1)^2$ oder 0 mal. Er fällt folglich aus der allgemeinen Formel ganz aus. *)

---

*) Es wird hier von zwei Sätzen Gebrauch gemacht, welche folgendermassen lauten: 1) Genügt irgend ein Ausdruck $\varphi\alpha$ zugleich den Congruenzen $x^a-1\equiv 0$ (mod. p,α), $x^b-1\equiv 0$ (mod. p,α) $x^c-1\equiv 0$ (mod. p,α) etc. und t ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c etc., so genügt $\varphi\alpha$ auch der Congruenz $x^t-1\equiv 0$ (mod. p,α). 2) Ist t der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c etc., so ist p^t-1 der grösste gemeinschaftliche Theiler von p^a-1, p^b-1, p^c-1 etc., wenn p irgend eine ganze Zahl bedeutet. *Beweis* zu 1) Gesetzt r sei der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b, und $a=ra_1$, $b=rb_1$, so kann man x und y in ganzen Zahlen so bestimmen, dass $a_1x-b_1y=1$ ist. Da nun $(\varphi\alpha)^{ra_1}\equiv 1$ (mod. p,α) und $(\varphi\alpha)^{rb_1}\equiv$ (mod. p,α) ist, so muss auch $(\varphi\alpha)^{ra_1x}\equiv 1$ (mod. p,α) und $(\varphi\alpha)^{rb_1y}\equiv 1$ (mod. p,α), und mithin auch $(\varphi\alpha)^{ra_1x-rb_1y}\equiv 1$ (mod. p,α), also auch, da $a_1x-b_1y=1$ ist, $\varphi\alpha^r\equiv 1$ (mod. p,α) sein. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c etc. ist nun offenbar auch der grösste gemeinschaftliche Theiler von r, c etc., und durch wiederholte Anwendung des Bewiesenen auf r und c etc. geht der Satz leicht hervor. Zu 2) Gesetzt r sei der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b und $a=ra_1$, $b=rb_1$, so sei wieder $a_1x-b_1y=1$, und x und y seien ganze Zahlen. Nun ist bekanntlich von $p^{ra_1x}-1$ und $p^{rb_1y}-1$ das erstere ein Vielfaches von $p^{ra_1}-1$ und das zweite ein Vielfaches von $p^{rb_1}-1$. Der grösste gemeinschaftliche Theiler beider Ausdrücke muss mithin auch ein Theiler der Differenz $(p^{ra_1x}-1)-(p^{rb_1y}-1)$, oder von $p^{ra_1x}-p^{rb_1y}$, oder von $p^{rb_1y}(p^{ra_1x-rb_1y}-1)$, und mithin ein Theiler von $p^{rb_1y}(p^r-1)$ sein. Da nun p^{rb_1y} keinen Theiler mit p^a-1 gemeinschaftlich haben kann, so muss dieser gemeinschaftliche Theiler in p^r-1 liegen, und kann mithin nichts anderes als dieser Ausdruck selbst sein. Hieraus folgt, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von p^a-1, p^b-1, p^c-1 etc., zugleich der grösste gemeinschaftliche Theiler von p^r-1 und p^c-1 etc. ist; und aus wiederholter Anwendung des Bewiesenen geht der Satz hervor.

3) Gesetzt der Ausdruck genügte den Congruenzen $x^{p^{ABC}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), $x^{p^{ABD}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) und $x^{p^{ACD}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), so müsste er auch der Congruenz $x^{p^{A}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) genügen, da p^A-1 der grösste gemeinschaftliche Theiler von $p^{ABC}-1$, $p^{ABD}-1$, $p^{ACD}-1$ ist (Vergl. d. Anmerkung). Er müsste mithin auch den Congruenzen $x^{p^{AB}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), $x^{p^{AC}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) und $x^{p^{AD}-1}-1\equiv$ (mod. p,α) genügen. Demnach würde er in der allgemeinen Formel in folgenden Gliedern mitgezählt sein: $(p^{ABCD}-1)-(p^{ABC}-1)-(p^{ABD}-1)-(p^{ACD}-1)+(p^{AB}-1)+(p^{AC}-1)+(p^{AD}-1)-(p^{A}-1)$. Da er nun in jedem Gliede einmal mitgezählt ist, so ist er im Ganzen $1-3+3-1=(1-1)^3$ oder 0 mal gezählt und fällt folglich aus der allgemeinen Formel aus.

4) Genügt der Ausdruck sämmtlichen oben angegebenen 4 Congruenzen, so genügt er auch der Congruenz $x^{P-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), weil $P-1$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $(p^{ABC}-1)$, $(p^{ABD}-1)$, $(p^{ACD}-1)$ und $(p^{BCD}-1)$ ist. Er genügt mithin auch den Congruenzen $x^{p^{A}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), $(x^{p^{B}-1}-1)\equiv 0$ (mod. p,α) etc., $x^{p^{AB}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α), $x^{p^{AC}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) etc. $x^{p^{ABC}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) etc. und endlich auch $x^{p^{ABCD}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α). Er ist mithin in jedem Gliede der allgemeinen Formel mitgezählt, kommt daher $1-4+6-4+1=(1-1)^4$ oder 0mal vor und fällt mithin aus der allgemeinen Formel aus. Es sind demnach in der allgemeinen Formel allein diejenigen Ausdrücke von α mitgezählt, die der Congruenz $x^{p^{n_1}-1}-1\equiv 0$ (mod. p,α) nur genügen, wenn $n_1=n$ ist. Denn diese liegen im ersten Gliede und bleiben von den folgenden unberührt. Da nun je n Ausdrücke von α in einem irreductiblen Ausdrucke von x vom $n$ten Grade nach dem Modul p als Wurzeln eingehen, so wird die Anzahl sämmtlicher irreductiblen Ausdrücke von x, die zum $n$ten Grade gehören, durch die Formel $\{p^{ABCD}-p^{ABC}-p^{ABD}$

$- P^{ACD} - P^{BCD} + P^{AB} + P^{AC} + P^{AD} + P^{BC} + P^{BD} + P^{CD} - P^{A}$
$- P^{B} - P^{C} - P^{D} + P \Big\} \frac{1}{A^a B^b C^c D^d}$ ausgedrückt, wo $P = p^{A^{a-1} B^{b-1} C^{c-1} D^{d-1}}$ ist A, B, C, D Primzahlen bedeuten und der Grad $n = A^a B^b C^c D^d$ ist.

§. 49.

Einer aufmerksamen Betrachtung der vorhergehenden Paragraphen wird es nicht entgehen, dass sich die erhaltenen Resultate auch auf die Moduln von der Form Mod. (p, α), Mod. (p, α, β) etc. hinüber führen lassen. Hier genüge es, Folgendes zu bemerken:

1) Es giebt in Bezug auf jeden Modul (p, α) irreductible Congruenzen von jeglichem Grade.

2) Bedeutet $F(x) \equiv 0$ (mod. p, α) eine irreductible Congruenz vom Grade m nach dem Modul (p, α), und hängt α selbst von einer irreductiblen Congruenz vom Grade n nach dem Modul p ab, so ist jeder irreductible Ausdruck vom (m_1)ten Grade von x, welcher nach dem Modul (p, α) ein Divisor von $x^{p^{mn}-1} - 1$ ist, von der Form $(x - \varphi(\beta))\,(x - \varphi(\beta^{p^n}))\, x - \varphi(\beta^{p^{2n}}))\ldots(x - \varphi(\beta^{p^{(m_1-1)n}}))$ in Bezug auf den Modul (p, α).

3) Die Formeln für die Anzahl der irreductiblen Congruenzen nach dem Modul (p, α) gehen nun unter den gegebenen Voraussetzungen aus den fur den Modul p entwickelten hervor, wenn man statt p; p^n, und statt n den Grad von Fx, also m setzt.

Ist daher m eine Primzahl, so erhält man die Anzahl der irreductiblen Congruenzen vom Grade m nach dem Modul (p, α) aus der Formel in §. 46. durch $p^n \left(\frac{p^{n(m-1)} - 1}{m} \right)$ ausgedrückt. Die allgemeine Formel in §. 48. ändert sich nur insofern, als P die Bedeutung $p^{nA^{a-1} B^{b-1} C^{c-1} D^{d-1}}$ annimmt.

§. 50.

Wenden wir zum Schluss noch einmal unsere Aufmerksamkeit auf den Ausdruck $x^n - 1$.

In (§. 18.) wurde gefunden, dass jeder irreductible Ausdruck sich nach dem Modul p als ein Divisor eines Ausdrucks von der Form $x^k - 1$ ansehen lasse. Es soll nun, unter der Voraussetzung, dass n eine Primzahl ist,

a priori gesucht werden, in wie viele irreductible Ausdrücke des wievielten Grades sich $\frac{x^n-1}{x-1}$ nach dem Modul p zerfällen lasse. — Zu dem Ende wird behauptet: dass, wenn n_1 die kleinste Zahl ist, welche der Congruenz $p^{n_1}-1\equiv 0 \pmod{n}$ genügt, oder, was dasselbe ist, wenn p in Bezug auf den Modul n zu n_1 gehört, $\frac{x^n-1}{x-1}$ in Bezug auf den Modul p in $\frac{n-1}{n_1}$ irreductible Ausdrücke vom Grade n_1 zerfället werden könne.

Beweis. Ist nämlich α eine Wurzel des Ausdrucks $\frac{x^n-1}{x-1}$, so ist bekanntlich, wenn n eine Primzahl ist, $\frac{x^n-1}{x-1}=(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots\ldots(x-\alpha^{n-1})$. Setzt man nun $p^{n_1}-1=N$, so wird der Ausdruck, welcher die Nten Potenzen der Wurzeln von $\frac{x^n-1}{x-1}$ als Wurzeln in sich schliesst, zu $(x-\alpha^N)(x-\alpha^{2N})\ldots(x-\alpha^{(n-1)N})$. Geht nun N nicht mit n auf, so werden die Reste von $N, 2N, \ldots\ldots (n-1)N$ mit den Resten $1, 2, \ldots n-1$ nach dem Modul n übereinstimmen, und der Ausdruck $(x-\alpha^N)(x-\alpha^{2N})\ldots(x-\alpha^{(n-1)N})$ wird mit $(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots(x-\alpha^{n-1})$ oder mit $\frac{x^n-1}{x-1}$ zusammenfallen. Da dieser Ausdruck für $x=1$ den Werth n annimmt, so folgt, dass, wenn n nicht p ist, x^n-1 nach dem Modul p nur einen irreductiblen Factor von einem solchem Grade n_1 haben könne, welcher der Congruenz $p^{n_1}-1\equiv 0 \pmod{n}$ genügt (§. 37.). Es bleibt nun noch zu beweisen, dass, wenn n_1 die kleinste Zahl ist, welche die Congruenz $p^{n_1}-1\equiv 0 \pmod{n}$ realisirt: dass alsdann $\frac{x^n-1}{x-1}$ in $\frac{n-1}{n_1}$ irreductible Factoren vom Grade n_1 zerfället werden könne. Gesetzt es wäre $\frac{x^n-1}{x-1}=fx.Qx+pRx$, wo fx einen irreductiblen Factor nach dem Modul p bedeutet und Qx und Rx Ausdrücke von x sind, so sieht man leicht, dass die beiden Ausdrücke, von welchen der eine die $(p^{n_1}-1)$ten Potenzen der Wurzeln von $fx.Qx+pRx$ und der andere dieselben Potenzen der Wurzeln von $fx.Qx$ als Wurzeln in sich schliesst, nach dem Modul p congruent sein werden (§. 2. §. 3. Einl.). Nennt man nun α eine Wurzel von fx, so ist $fx\equiv(x-\alpha)(x-\alpha^p)\ldots\ldots(x-\alpha^{p^{m-1}})$ (mod. p, α), wo m den Grad von fx angiebt. Da nun, wenn $p^{n_1}-1\equiv 0$ (mod. n) ist, und der Ausdruck, welcher die $(p^{n_1}-1)$ten Potenzen der Wurzeln

25.

Disquisitiones de residuis cujusvis ordinis.

(Auctore Friderico Arndt, Sundiae).

1.

Residuum t^{ti} ordinis moduli M intelligimus numerum talem, qui potestati numeri alicujus t^{tae} sec. mod. prop. congruus fiat, i. e. A vocatur residuum t^{ti} ordinis mod. M, quoties numerus x inveniri potest talis, ut fiat

$$x^t \equiv A \text{ (mod. } M).$$

Quo loco observandum est, in sequentibus nos supponere, numerum A ad modulum primum esse, quo facto bini horum x, A, M primi inter se erunt. Theoria enim numerorum ad modulum non primorum ad casum illum simplicem facile reducitur.

2.

Multitudo residuorum.

Omnibus numeris ad modulum primis eoque minoribus ad eandem potestatem t^{tam} elevatis quaestio se offert, quot harum potestatum residua minima sint inter se diversa? Ut decidamus hanc quaestionem, sit α numerus ad M primus, cujus potestas t^{ta} residuum A praebeat, vel α radix congruentiae

$$(a) \qquad x^t \equiv A \text{ (mod. } M).$$

Denotante μ multitudinem omnium hujus congruentiae radicum, ex μ numeris ad modulum primis gignitur unum idemque residuum A. Designat porro α' numerum ad M primum, ab quaque radicum congruentiae (a) diversum, cujus potestas t^{ta} residuum B relinquat, vel α' radix congruentiae

$$(b) \qquad x^t \equiv B \text{ (mod. } M).$$

Quum jam in universum congruentia $x^t \equiv z$ (mod. M) tot radices diversas habeat, quot simplicior haec $x^t \equiv 1$ (mod. M), multitudo radicum congruentiae (b) eadem erit, quae congruentiae (a), nempe μ, ex quo jam 2μ habentur numeri ad modulum primi, qui duo residua A, B t^{ti} ordinis praebeant.

Quoniam hoc modo progredi licet, quoad omnes ad modulum primi sint exhausti, patet:

Multitudinem residuorum t^{ti} ordinis moduli cujusvis M, quae ad M sint prima eoque minora, numero integro

$$\frac{\varphi M}{\mu}$$

aequalem esse, designante φM multitudinem num. ad M primorum eoque minorum, μ multitudinem radicum congruentiae.

$$(c) \qquad x^t \equiv 1 \pmod{M}.$$

3.

Quum congruentia (c) pro modulo p^n vel $2p^n$ (ubi p numerus primus impar) admittat δ radices diversas, denotante δ divisorem comm. maximum numerorum t, et $p^{n-1}(p-1)$, deinde congruentia (c) pro modulo 2^n (ubi $n > 2$) pro impari t unam radicem, pro pari autem $2^{\lambda+1}$ radices habeat, designante 2^λ divisorem comm. maximum numerorum t, et 2^{n-2} (Cf. comm. „Nova methodus determinandi multitudinem etc.), sequitur:

Multitudinem residuorum t^{ti} ordinis moduli p^n vel $2p^n$ esse $\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}$, multitudinem residuorum t^{ti} ordinis moduli 2^n pro pari t esse $\frac{2^{n-2}}{2^\lambda}$, pro impari 2^{n-1}.

4.

Corollaria.

I. *a*) Multitudo residuorum quadrat. moduli p^n vel $2p^n$ est $\frac{1}{2}(p-1)\,p^{n-1}$.

b) Multitudo residuorum cubicorum moduli p est aut $\frac{1}{3}(p-1)$ aut $p-1$, prout $p = 12k+1,\ 7$ vel $12k+5,\ 11$.

In primo casu exstant $\frac{2}{3}(p-1)$ non-residua, in secundo vero quicunque numerus ad p primus est residuum cubicum mod. p.

c) Multitudo residuorum biquadrat. mod. p est aut $\frac{1}{4}(p-1)$ aut $\frac{1}{2}(p-1)$, prout $p = 4k+1$ vel $4k+3$.

In primo casu exstant $\frac{3}{4}(p-1)$ non-residua, in secundo vero omne residuum quadraticum est residuum biquadraticum, ita ut in theoria resid. biquadrat. solius moduli formae $4k+1$ ratio habenda sit. Quod ex alio fonte petivit *Ill. Gauss* in Theoria res. biquadr. Comm. prima Art. 4.

d) Multitudo residuorum quinti ordinis mod. p est aut $\frac{1}{5}(p-1)$ aut $p-1$, prout $p = 20k + 1, 11$, vel $20k + 3, 7, 9, 13, 17, 19$.

In secundo casu quicunque numerus ad p primus residuum quinti ordinis est.

II. *a*) Quicunque numerus impar residuum est ordinis imparis moduli 2^n, (Cf. 3).

b) Multitudo residuorum quadrat. mod. 2^n est 2^{n-3}, quod alio modo demonstravi in opere „Grunert Archiv für Mathematik und Physik Th. 2 Heft 1. pag. 25.

c) Multitudo non-residuorum t^{ti} ordinis paris est $2^{n-1} - 2^{n-2-\lambda} = 2^{n-2-\lambda}\,(2^{\lambda+1} - 1)$.

5.

Multitudo resid. quadrat. mod. p est $\frac{1}{2}(p-1)$ infra p; totidem sunt inter p et $2p$, inter $2p$ et $3p$, etc., ergo multitudo residuorum quadrat. mod. p infra p^n est $p^{n-1}\,\frac{1}{2}(p-1)$. Sed etiam multitudo res. quadrat. moduli p^n infra p^n est $p^{n-1}\,\frac{1}{2}(p-1)$, ergo:

Quivis numerus ad p primus, qui ipsius p est residuum, erit etiam ipsius p^n residuum quadraticum.

Cf. Gauss Disquisitiones Arithmeticae p. 99. sqq.

6.

Criterium generale residuorum t^{ti} ordinis.

I. De modulo $M = p^n$ vel $2p^n$.

a) Quoties A est residuum t^{ti} ordinis moduli $M = p^n$ vel $2p_n$, semper potestas

$$A^{\frac{\varphi M}{\delta}}$$

unitati congrua erit.

Habetur enim $x^t \equiv A$ (mod. M), ergo $A^{\frac{\varphi M}{\delta}} \equiv (x^t)^{\frac{\varphi M}{\delta}} \equiv \left(x^{\frac{t}{\delta}}\right)^{\varphi M} \equiv 1$.

b) Vice versa: quoties potestas $A^{\frac{\varphi M}{\delta}}$ unitati congrua est, semper erit A residuum t^{ti} ordinis moduli M.

Etenim omne t^{ti} ordinis residuum A congruentiae satisfacit

$$x^{\frac{\varphi M}{\delta}} \equiv 1 \text{ (mod. } M);$$

ex a), ergo, quum sint $\frac{\varphi M}{\delta}$ radices hujus congruentiae, totidemque residua t^{ti} ordinis diversa, numerus A congruentiae $x^{\frac{\varphi M}{\delta}} \equiv 1 (\text{mod.} M)$ satisfaciens non-residuum esse nequit, ex quo residuum esse debet.

Tanquam corollarium habemus propositionem, quae invenitur apud *Ill. Legendre* in opere „Théorie de nombres", nempe.

Numerus A est residuum quadraticum mod. p vel non-residuum, prout potestas $A^{\frac{1}{2}(p-1)}$ unitati positivae vel negativae congrua est.

II. De modulo 2^n, ubi $n > 2$.

a) Quoties A est residuum t^{ti} ordinis paris, semper congruentia locum habet

$$A^{2^{n-2-\lambda}} \equiv 1 \; (\text{mod. } 2^n).$$

Est enim $x^t \equiv A$, ergo $A^{2^{n-2-\lambda}} \equiv (x^t)^{2^{n-2-\lambda}} \equiv (x^{2^{n-2}})^{\frac{t}{2^\lambda}} \equiv 1.$

b) Hanc autem propositionem convertere non licet.

Extant enim $2^{n-2-\lambda}$ residua diversa, omniaque satisfaciunt congruentiae

$$(G) \qquad x^{2^{n-2-\lambda}} \equiv 1 \; (\text{mod. } 2^n).$$

Haec autem congruentia habet $2.2^{n-2-\lambda}$ radices diversas, ex quo restant $2^{n-2-\lambda}$ radices, quae non sint residua t^{ti} ordinis.

Itaque omnes numeri impares, modulo 2^n minores, in tres classes distribui possunt, quarum

Prima (K) continet omnia residua t^{ti} ordinis paris, satisfaciuntque congruentiae (G);

Secunda (Z) continet non-residua ea, quae congruentiae (G) satisfaciunt.

Tertia (M) continet non-residua ea, quae congruentiae (G) non satisfaciunt.

Multitudo numerorum primae, secundae, tertiae classis est resp. $2^{n-2-\lambda}$, $2^{n-2-\lambda}$, $2^{n-1-\lambda}(2^\lambda - 1)$.

Jam classis determinenda est, ad quam numerus aliquis impar referendus sit. Priusquam autem hoc argumentum aggredior, corollaria quaedam huj. paragr. addam.

7.

Pro $t=2$ erit $\delta=2$, et $\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta} = \frac{1}{2}(p-1).p^{n-1}$, ergo

a) -1 est residuum vel non-residuum quadraticum mod. p^n vel $2p^n$, prout $\frac{1}{2}(p-1)$ est par vel impar, i. e. prout p formae $4m+1$ vel formae $4m+3$.

Pro $t=4$ erit $\delta=2$ aut 4, prout $\frac{1}{2}(p-1)$ impar aut par, ergo

b) -1 est non-residuum biquadrat., quoties p formae $4m+3$, residuum vero, aut non-residuum quoties p formae $8m+1$ aut formae $8m+5$.

Cf. Gauss Theoria res. biquadrat. Comm. Prim. Art. 9.

c) Productum ex duobus residuis t^{ii} ordinis residuum est.

d) Productum ex residuo in non-residuum est non-residuum.

e) Productum ex duobus non-residuis tum residuum tum non-residuum esse potest. Si vero de residuis quadraticis agitur, productum hoc semper residuum est.

8.

Solutio problematis decidendi, num sit numerus propositus impar residuum ordinis paris moduli 2^n.

Quoties $n-2=\lambda$ (quo facto t multiplum ipsius 2^{n-2}), congruentia (*G*) transibit in hanc $x\equiv 1$, cui 1 modo satisfacit; ex quo sequitur:

Quemcunque numerum imparem ab unitate diversum ad classem tertiam referendum esse, quoties ordo t multiplum sit ipsius 2^{n-2}.

Sit jam $n-2>\lambda$. Quum x habeat formam $2^k h\pm 1$ (ubi $k>1$ atque h impar), erit pro $t=2^\lambda f$ (ubi f impar) $x^{2^{n-2-\lambda}} = 2^{k+n-2-\lambda} h+1$ (ubi h^1 impar), transitque congruentia (*G*) in hanc $2^{k+n-2-\lambda}\equiv 0$ (mod. 2^n). Haec autem congruentia tum modo locum habet, quando $k+n-2-\lambda \gtreqqless n$, vel $k+2-\lambda \gtreqqless 0$. Ergo prop. habemus:

Quicunque numerus impar formae $2^n h\pm 1$ ad tertiam classem referendus est, quoties $k-2-\lambda<0$, ad primam vero vel ad secundam, quoties $k-2-\lambda \gtreqqless 0$.

Utrum numerus prop. ad primam pertineat classem, an ad secundam ita deciditur.

Primum facile intelligitur, quemcunque numerum formae $4q-1$

non-residuum esse. Posito enim $t = 2^\lambda f$ (ubi f impar), $x^t \equiv 4q - 1$, habetur $2^{k+\lambda} h^t + 1 \equiv 4q - 1$, vel $2^{k+\lambda-1} h^t - 2q + 1 \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$, q. e. a.

Quando igitur $a = 2^k h \pm 1$, atque $k - 2 - \lambda \gtreqless 0$, forma $2^k h - 1$ ad secundam classem pertinet, ergo altera forma $2^k h + 1$ ad primam; eam si nonnullae formae $2^k h + 1$ ad secundam pertinerent, quia utriusque forma eadem multitudo, secunda classis plures numeros prima contineret; contra praeced. Ergo hoc alterum theorema:

Quoties $k - 2 - \lambda \gtreqless 0$, forma $2^k h + 1$ ad primam, forma vero $2^k h - 1$ ad secundam classem referenda est.

Exempl. Sit modulus $2^5 = 32$, $n = 5$, $t = 6$, $\lambda = 1$, $k - 2 - \delta = k - 3$. Pro $k = 2$ est $k - 2 - \lambda < 0$, ergo pertinent ad tertiam classem formae $4h \pm 1$ (h impar) i. e. 3, 5, 11, 13, 19, 21, 27, 29.

Pro $k = 3$ est $k - 2 - \lambda = 0$, ergo ad primam classem pertinent formae $8h + 1$ (h impar) i. e. 1, 9, 25, ad secundam vero formae $8h - 1$ i. e. 7. 23. 31.

Pro $k = 4$ est $k - 2 - \lambda > 0$, ergo ad primam classem pertinent formae $16h + 1$ (h impar) i. e. 17, ad secundam vero $16h - 1$ i. e. 15.

Itaque ad tertiam classem pertinent 3, 5, 11, 13, 19, 21, 27, 29 (non-res. sexti ordi.)

ad primam classem 1, 9, 17, 25 (Residua) } satisf. congr. $x^6 \equiv 1 \pmod{32}$
ad secundam classem 7, 15, 23, 31 (non-residua) }

Ceterum numero primae classis A respondet usque numerus $2^n - A$ secundae classis.

In universum pro $k - 2 - \lambda = 0$ habetur forma $2^{2+\lambda} h + 1$, praebetque valores pro $h = 1, 3, \dots (2^{n-2-\lambda} - 1)$

pro $k - 2 - \lambda = 1$ habetur forma $2^{3+\lambda} h + 1$ praebetque valores pro $h = 1, 3, \dots (2^{n-3-\lambda} - 1$ etc.

pro $k - 2 - \lambda = n - 3 - \lambda$ habetur forma $2^{n-1} h + 1$ praebetque valorem pro $h = 1$.

Ergo multitudo residuorum est $2^{n-3+\lambda} + 2^{n-4+\lambda} + \dots 2^\lambda + 1 = 2^{n-2-\lambda} - 1$, cui summae unitas adscribenda erit, ex quo multitudo revera $2^{n-2-\lambda}$, ut fieri debet.

9.

Est autem criterium simplicior residui t^{ti} ordinis 2^n, quod ita invenitur: Forma $2^k h + 1$ (h impar) residuum est, quoties $k - 2 - \lambda \gtreqless 0$. Quodsi

ponimus $k = 2 + \lambda + \varphi$, habetur $A = 2^{2+\lambda} 2^{\varphi} h + 1$, ubi φ situs est inter 0 et $n - 3 - \lambda$, ipsis limitibus inclusis. Quum jam $2^{\varphi} h$ repraesentet omnes numeros integros inter 0 et $2^{n-2-\lambda} - 1$, hoc theorema habemus:

Denotante 2^{λ} divisorem comm. maximum numerorum t, et 2^{n-2} (ubi t par), atque h numerum quemcunque integrum inter 0 et $2^{n-2-\lambda} - 1$, ipsius limitibus inclusis, forma

$$2^{2+\lambda} h + 1$$

residuum t^{a} ordinis est moduli 2^{n}, reliqui numeri sunt non-residua.

Tanquam corollarium habetur propositio haec:

Quando potestas aliqua numeri 2 altior quam secunda, puta 2^{n} pro modulo assumitur, omnes numeri impares formae $8h + 1$ erunt residua quadratica, reliqui vero non-residua quadratica. Quod alio modo probavi in Comm: „De protestatum periodis. rad. primit. etc." (*Grunert* Archiv Th. II. Hft. I. 29 seq.) Quaestio quidem, ad quam classem numerus propositus sec. mod. 2^{n} referendus sit, theoremate, quod sequitur, generali deciditur:

Quoties numerus prop. A est $\equiv 1 \pmod{2^{2+\lambda}}$, referendus est ad primam classem.

Quoties est $\equiv -1 \pmod{2^{2+\lambda}}$, ad secundam pertinebit.

Quoties denique $A \equiv r \pmod{2^{2+\lambda}}$, ubi r ab $+1$ et -1 diversus, ad tertiam classem referri debet.

Coroll. Productum ex num. classis *I* in num. class. *I* reperitur in *I*
. . . . *I* . . . . *II* . . . . *II*
. . . . *I* . . . . *III* . . . . *III*
. . . . *II* . . . . *II* . . . . *I*
. . . . *II* . . . . *III* . . . . *III*
. . . . *III* . . . . *III* . . . . *I* vel *II*,
vel *III* prout productum num. $zz^{1} \equiv \left.\begin{matrix}+1\\-1\\r\end{matrix}\right\}$.

10.

Propositio paragr. praeced., qua quidem tota theoria residuorum cujusvis ordinis paris exhauritur pro modulo 2^{n}, facilius ita probatur:

Quoties A congruentiae satisfacit

$$x^{2^{n-2-\lambda}} \equiv 1 \pmod{2^n}$$

ad exponentem pertinere debet, qui est divisor exp. $2^{n-2-\lambda}$ i. e. ad exp. $2^{n-\varphi}$, ubi $n-\varphi \overline{\overline{\gtrless}}\, n-2-\lambda$ vel $\varphi \overline{\overline{\gtrless}}\, 2+\lambda = 2+\lambda+\varrho$. Ex quo habetur

$$A = 2^{2+}\ 2^{\varrho} h \pm 1 = 2^{2+\lambda} h^1 \pm 1,$$

denotante h^1 integrum quemcunque (ad exp. $2^{n-\varphi}$ pertinet num. $2^{\varphi} h \pm 1$, ubi h impar). Forma autem $2^{2+\lambda} h^1 - 1$ est non-residuum (8.), ergo quicunque numerus formae $2^{2+\lambda} h + 1$ residuum, quoniam totidem residua congruentiae $x^{2^{n-2-\lambda}} \equiv 1 \pmod{2^n}$ satisfaciunt, quod non-residua.

11.

Circa residua cujusvis ordinis pro modulo 2^n nihil amplius desiderandum relictum est. Quod vero attinet ad modulum p^n, criterium art. 6. ab molestia quadam non liberum est, quum residuum potestatis $A^{\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}}$ determinandum sit. Quaestio circa residua quadratica resolvitur theoremate fundamentali (lege reciprocitatis) quod *Ill. Gauss* methodis diversis demonstravit. Theoria residuorum ordinum valde quidem ab *Gaussio* promota, sed argumentum disquisitionis difficillimum praebet.

Adjumento autem tabulae indicum facile deciditur, utrum numerus propositus residuum sit an non residuum, ut sequentia docent.

I.

Quando A est residuum t^{ti} ordinis mod. p^n vel $2p^n$, Ind. A per divisorem communem maximum num. t, et $p^{n-1}(p-1)$ divisibilis esse debet, et vice versa, quoties Ind. A per hunc divisorem δ divisibilis est, residuum erit t^{ti} ordinis mod. prop.

In prima enim supp. habetur $x^t \equiv A$ (mod. p^n vel $2p^n$), ergo t Ind. $x \equiv$ Ind. A (mod. $p^{n-1}(p-1)$), ideoque $\frac{t}{\delta}$ Ind. $x \equiv \frac{\text{Ind. } A}{\delta} \left\{\text{mod. } \frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}\right\}$

In secunda supp. est congruentia resolubilis $\frac{t}{\delta}$ Ind. $x \equiv \frac{\text{Ind. } A}{\delta}$ $\left\{\text{mod. } \frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}\right\}$, ex quo t Ind. $x \equiv$ Ind. A $\{\text{mod. } p^{n-1}(p-1)\}$, ideque $x^t \equiv A$ (mod. p^n vel $2p^n$).

II.

Simili modo probatur haec propositio.

Quoties A est residuum t^{ti} ordinis paris mod. 2^n, semper Ind. A *) per divisorem comm. maximum num. t, 2^{n-2} divisibilis est, et vice versa, quoties A per hunc divisorem divisibilis, residuum esse debet t^{ti} ordinis.

12.

Periodus residuorum.

I.

Sit A numerus ad exponentem $\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}$ pertinens sec. mod. p^n vel $2p^n$, eruntque residua potestatum

$$A,\ A^2,\ A^3,\ \ldots A^{\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}}$$

quorum multitudo multitudini residuorum t^{ti} ordinis aequalis, omnia inter se diversa. Quum omnia sint residua t^{ti} ordinis, his potestatibus omnia residua exhibentur.

II.

Simili modo patet, omnia residua t^{ti} ordinis paris mod. 2^n residuis potestatum exhiberi:

$$A,\ A^2,\ A^3,\ \ldots A^{2^{n-2-\lambda}},$$

designante A numerum ad exponentem $2^{n-2-\lambda}$ pertinentem.

13.

Relationes quaedam residuorum insignes.

Summa s residuorum omnium t^{ti} ordinis moduli p (ubi p num. primus impar) ex (12) congrua est summae potestatum $A + A^2 + A^3 + \text{etc.} + A^{\frac{p-1}{\delta}}$, ubi δ divisor comm. max. num. t, $p-1$, atque A ad exponentem $\frac{p-1}{\delta}$ pertinet, ergo habetur $s(A-1) = A(A^{\frac{p-1}{\delta}} - 1) \equiv 0$ (mod. p). Quodsi $A-1$

*) Quodcunque residuum utpote formae $8m+1$ indice aliquo gaudet sec. mod. 2^n.

non evanescat, erit $s \equiv 0$ (mod. p). Si vero $A-1$ evanescat, habetur $\frac{p-1}{\delta} = 1$, $p-1=\delta$, $t=p-1$. Ex quo

Theorema primum. Summa residuorum omnium t^{ti} ordinis moduli p per p divisibilis est, excepto casu, in quo ordo numero $p-1$ aequalis est.

Nota. Summa residuorum quadraticorum per p divisibilis est, excepto casu, in quo $p=3$.

Hoc theorema etiam pro modulo p^n vel $2p^n$ valere, ita patet:

Designentur residua quadratica per $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_\mu$. Jam 4 residuum est moduli cujusvis, ergo residua quadratica omnia exhibentur productis $4\varrho_1, 4\varrho_2, 4\varrho_3, \ldots 4\varrho_\mu$, quae sunt incongrua, ut facile perspicitur. Summa igitur s residuorum congrua est producto $4s$, vel $4s \equiv s$, ex quo $3s \equiv 0$. Ergo, quum casum, in quo $p=3$ exceperimus, erit $s \equiv 0$ (mod. p^n vel $2p^n$).

Productum residuorum t^{ti} ordinis moduli p^n vel $2p^n$ congruum est potestati $A^{1+2+3+\ldots+\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}} = A^{\frac{1}{2}\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}\left\{\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}+1\right\}}$. Quodsi $\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}$ impar est, habetur manifesto productum illud $P \equiv 1$. Si vero $\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}$ est par, perspicuum erit, esse $P \equiv -1$. Ergo habemus

Theorema secundum. Productum ex omnibus residuis ordinis cujusvis moduli p^n vel $2p^n$ unitati congruum est positivae aut negativae. Positive sumenda erit unitas, quoties $\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}$ impar, quoties vero hic numerus par, unitas negative sumenda est.

Quod attinet ad residua quadratica, propositionem alio olim modo demonstravi in „Comm. De potestatum periodis etc." (*Grunert* Archiv Th. II. Heft 1).

Scribam Sundiae d. 3. M. Maji 1845.

26.

Bemerkungen über die Verwandlung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch.

(Von Herrn Dr. Arndt zu Stralsund.)

Die Untersuchung, welche ich anzustellen beabsichtige, betrifft insbesondere die Discussion der Gleichung

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$

welche bekanntlich immer in ganzen Zahlen auflösbar ist, indem p, q Zähler und Nenner des vorletzten Partialwerthes irgend einer Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ sind; jedoch muss die Periode graden Ranges sein, wenn die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs ungerade ist. Wenn man nämlich obige Gleichung vom rein arithmetischen Standpunct aus näher untersucht, so ergeben sich bemerkenswerthe Eigenschaften der Zahlen p und q und, mit Ausnahme eines einzigen Falls, ein Criterium dafür, ob die Gliederzahl der Periode gerade oder ungerade sei. Daran schliesst sich die Untersuchung über die Mittelquotienten der Periode, wenn solche vorhanden sind.

Legendre hat die Gleichung $p^2 - Aq^2 = 1$ in der *Théorie des nombres* schon aus einem ähnlichen Gesichtspuncte betrachtet, jedoch nur unvollständig und nur für den Fall, wenn A eine Primzahl oder das Product zweier Primzahlen ist. Ich habe die Untersuchung verallgemeinert.

Indem ich mich nach diesen Vorbemerkungen zum Gegenstande selbst wende, bemerke ich, dass in obiger Gleichung unter p und q immer die kleinsten Zahlen (ausser 1 und o) verstanden werden welche dieselbe auflösen die also Zähler und Nenner des vorletzten Partialwerths in der ersten oder zweiten Periode sind, jenachdem die Gliederzahl der Periode gerade oder ungerade ist.

I. Discussion der Gleichung $p^2 - Aq^2 = 1$, wenn A eine ungerade Zahl ist.

Die Gleichung werde in Factoren zerlegt, auf folgende Weise:

$$(p+1)(p-1) = Aq^2$$

Die Untersuchung erfordert die Unterscheidung zweier Hauptfälle; nämlich:

(A) p sei ungerade und q gerade.

In diesem Falle hat man $\frac{1}{2}(p+1).\frac{1}{2}(p-1) = A.(\frac{1}{2}q)^2$. Ist nun ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{1}{2}(p+1)$ und $\frac{1}{2}q$, so ist der Theil der Gleichung rechts durch ϑ^2 theilbar, also auch der Theil links, und zwar $\frac{1}{2}(p+1)$. Setzen wir daher $\frac{1}{2}(p+1) = \vartheta^2\varrho_1$, $\frac{1}{2}q = \vartheta q'$, so wird $\varrho_1.\frac{1}{2}(p-1) = q'^2 A$. Nun ist aber q' zu ϱ_1 prim, folglich geht q'^2 in $\frac{1}{2}(p-1)$ auf. Setzt man daher $\frac{1}{2}(p-1) = q'^2\varrho_2$, so ist $\varrho_1\varrho_2 = A$. Noch mag bemerkt werden, dass q' das grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{1}{2}(p-1)$ und $\frac{1}{2}q$ ist, denn in beiden Zahlen geht es auf und die Quotienten sind relative Primzahlen.

(B) Es sei p gerade und q ungerade.

Die Betrachtung ist der in dem ersten Falle ganz analog. Ist nämlich jetzt ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass von $p+1$ und q, also $p+1 = \vartheta^2\varrho_1$, $q = \vartheta q'$, so wird $\varrho_1.(p-1) = Aq'^2$. Da nun q' zu ϱ_1 prim ist, so geht q'^2 in $p-1$ auf und man hat $p-1 = q'^2\varrho_2$ also, $\varrho_1\varrho_2 = A$. Zugleich ist q' das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen $p-1$ und q.

Bezeichnet nun in beiden Fällen ϑ_1 das grösste gemeinsame Maass von $p+1$ und q, ϑ_2 das von $p-1$ und q, so hat man, jenachdem der erste oder zweite Fall eintritt, das erste oder zweite System folgender Gleichungen:

Erstes System.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(p+1) = (\frac{1}{2}\vartheta_1)^2\varrho_1 \\ \frac{1}{2}(p-1) = (\frac{1}{2}\vartheta_2)^2\varrho_2 \\ \frac{1}{2}\vartheta_1\cdot\frac{1}{2}\vartheta_2 = \frac{1}{2}q \\ \varrho_1\varrho_2 = A \\ 1 = (\frac{1}{2}\vartheta_1)^2\varrho_1 - (\frac{1}{2}\vartheta_2)^2\varrho_2 \end{cases}$$

Zweites System.

$$\begin{cases} p+1 = \vartheta_1^2\sigma_1 \\ p-1 = \vartheta_2^2\sigma_2 \\ \vartheta_1\vartheta_2 = q \\ \sigma_1\sigma_2 = A \\ 2 = \vartheta_1^2\sigma_1 - \vartheta_2^2\sigma_2 \end{cases}$$

Im ersten System sind ϱ_1, ϱ_2 ungerade und relative Primzahlen.

Von den Zahlen $\frac{1}{2}\vartheta_1$, $\frac{1}{2}\vartheta_2$ ist die eine gerade, die andere ungerade, und beide sind ebenfalls relative Primzahlen.

Im andern System sind σ_1, σ_2 ungerade und relative Primzahlen.

ϑ_1, ϑ_2 sind ebenfalls ungerade und relative Primzahlen.

Alles dies ergiebt sich bei aufmerksamer Betrachtung obiger Gleichungen.

Ferner ist die Bemerkung nicht zu übersehen, dass im ersten System ϱ_1 niemals die Einheit sein kann, weil sonst die Gleichung $+1 = (\frac{1}{2}\vartheta_1)^2 - (\frac{1}{2}\vartheta_2)^2 A$, Statt fände, welche der Annahme wiederspricht, dass p und q die kleinsten Werthe der Gleichung $1 = x^2 - Ay^2$ sein sollen.

Endlich ist zu bemerken, dass die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ ungerade ist, wenn $\varrho_2 = 1$ ist, und umgekehrt.

2.

Ob nun das **erste** System oder das **zweite** Statt habe, wird von der Beschaffenheit des A abhängen, und beruht zum Theil auf der **Form**, welche der rechtseitige Theil der Gleichungen

$$1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2\varrho_1 - (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2\varrho_2$$
$$2 = \vartheta_1^2\sigma_1 - \vartheta_2^2\sigma_2$$

in jedem besondern Falle annimmt.

(A) Ist $\frac{1}{2}\vartheta_1$ ungerade und $\frac{1}{2}\vartheta_2$ gerade, so muss ϱ_1 die Form $4k+1$ haben.
Ist $\frac{1}{2}\vartheta_1$ gerade und $\frac{1}{2}\vartheta_2$ ungerade, so muss ϱ_2 die Form $4k+3$ haben.
Wenn also A von der Form $4m+1$ ist, so müssen
ϱ_1, ϱ_2 beide von der Form $4k+1$ sein, wenn $\frac{1}{2}\vartheta_1$ ungerade, und $\frac{1}{2}\vartheta_2$ gerade, und beide von der Form $4k+3$, wenn $\frac{1}{2}\vartheta_1$ gerade, $\frac{1}{2}\vartheta_2$ ungerade ist.
Ist dagegen A von der Form $4m+3$, so muss
ϱ_1 die Form $4k+1$ und
ϱ_2 die Form $4k+3$ haben.

(B) In Bezug auf das zweite System ist leicht Folgendes zu erkennen:
Haben σ_1, σ_2 beide die Form $4k+1$, oder beide die Form $4k+3$, so ist $\vartheta_1^2\sigma_1 - \delta^2_2\sigma_2$ von der Form $4k$.
Es müssen also, soll das zweite System gelten, σ_1 und σ_2 von verschiedener Form sein.
Man wird insbesondere finden, dass nur folgende Combinationen der Zahlen σ_1 und σ_2 Statt haben können:

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 = 8k+1 & \sigma_1 = 8k+5 & \sigma_1 = 8k+3 & \sigma_1 = 8k+7 \\ \sigma_2 = 8k+7 & \sigma_2 = 8k+3 & \sigma_2 = 8k+1 & \sigma_2 = 8k+5 \\ A = 8m+7 & A = 8m+7 & A = 8m+3 & A = 8m+3 \end{array}$$

3.

Aus dem vorigen Paragraph ergeben sich folgende zwei Haupttheoreme:

Erstes Theorem. Wenn A von der Form $4m+1$ ist, so findet stets nur das erste System statt und

> ϱ_1 und ϱ_2 sind beide von der Form $4k+1$, wenn $\frac{1}{2}\vartheta_1$ ungerade, und $\frac{1}{2}\vartheta_2$ gerade ist,
>
> und beide von der Form $4k+3$, wenn $\frac{1}{2}\vartheta_1$ gerade, $\frac{1}{2}\vartheta_2$ ungerade ist.

Zweites Theorem. Wenn A von der Form $4m+3$ ist, so kann das erste, oder das zweite System gelten. Ist jenes der Fall, so hat

ϱ_1 die Form $4k+1$ und

ϱ_2 die Form $4k+3$,

Findet aber das zweite System Statt, so muss eine der in (2.) aufgeführten Combinationen von σ_1 und σ_2 eintreten.

4.

Besondere Untersuchung der Form $A = 4m+1$.

a) Ist A eine ungerade Potenz einer absoluten Primzahl von der Form $4m+1$, so muss, wegen $\varrho_1\varrho_2 = A$, und weil ϱ_1 und ϱ_2 relat. Primzahlen sind und ϱ_1 nie die Einheit sein kann, nothwendig

$$\varrho_1 = A \text{ und } \varrho_2 = 1$$

sein; es existirt also die Gleichung

$$-1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2 - (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2 A.$$

Wegen der letztern Gleichung ist

> α) -1 ein quadratischer Rest einer ungeraden Potenz jeder Primzahl von der Form $4m+1$ und
>
> β) die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ stets ungerade.

Bezeichnet man ferner irgend einen vollständigen Quotienten des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ durch $\dfrac{\sqrt{A}+I_n}{B_n}$, so ist, wenn die Gliederzahl der Periode (k) ungerade ist,



bekanntlich $B_{\frac{1}{2}(k-1)} = B_{\frac{1}{2}(k+1)}$, also wegen der bekannten Gleichung $B_{\frac{1}{2}(k-1)} B_{\frac{1}{2}(k+1)} = A - I^2_{\frac{1}{2}(k+1)}$, stets

$$A = B^2_{\frac{1}{2}(k+1)} + I^2_{\frac{1}{2}(k+1)}$$

d. h.

γ) **Jede ungerade Potenz einer absoluten Primzahl von der Form $4m+1$ ist die Summe zweier Quadrate.**

Auf ähnliche Weise findet man das letzte Theorem für den Fall, dass A eine Primzahl ist, erwiesen von *Legendre* in der *Théorie des nombres.*

b) Enthält A einen Primfactor von der Form $4m+3$, so ist bekanntlich -1 Nicht-quadratischer Rest von A, folglich kann die Gleichung $-1 = (\frac{1}{2}\vartheta_2)^2 - (\frac{1}{2}\vartheta_1)^2 A$ dann nicht Statt haben, also

$\alpha\alpha$) **In diesem Falle ist ϱ_2 niemals die Einheit;**

$\beta\beta$) **die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs ist stets gerade.**

c) Es bleibt noch der Fall übrig, wenn A nur Primfactoren von der Form $4m+1$ hat. Beispiele, deren ich zwei hersetze, zeigen, dass die Gliederzahl der Periode bald gerade, bald ungerade ist. Zu bestimmen, wenn sie gerade ist und wenn ungerade, ist mir noch nicht gelungen; gewiss bietet dieser Punct eine interessante Untersuchung dar.

Erstes Beispiel.

$A = 13.17 = 221$

$$\sqrt{221} = 14 + \frac{\sqrt{221}-14}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{221}-14} = \frac{\sqrt{221}+14}{25} = 1 + \frac{\sqrt{221}-11}{25}$$

$$\frac{25}{\sqrt{221}-11} = \frac{\sqrt{221}+11}{4} = 6 + \frac{\sqrt{221}-13}{4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{221}-13} = \frac{\sqrt{221}+13}{13} = 2 + \frac{\sqrt{221}-13}{13}$$

$$\frac{13}{\sqrt{221}-13} = \frac{\sqrt{221}-13}{4} = 6 + \frac{\sqrt{221}-11}{4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{221}-11} = \frac{\sqrt{221}-11}{25} = 1 + \frac{\sqrt{221}-14}{25}$$

$$\frac{25}{\sqrt{221}-14} = \frac{\sqrt{221}+14}{1} = 28 + \frac{\sqrt{221}-14}{1}$$

. . . . . .

Hier ist die Gliederzahl $k = 6$, also gerade.

Zweites Beispiel.

$A = 5^2 13 = 325$

$$\sqrt{325} = 18 + \frac{\sqrt{325}-18}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{325}-18} = \frac{\sqrt{325}+18}{1} = 36 + \frac{\sqrt{325}-18}{1}$$

. . . . . .

Hier ist die Gliederzahl $k = 1$, also ungerade.

5

Besondere Untersuchung der Form $A = 4m + 3$.

Wenn A die Form $4m + 3$ hat, so kann niemals $\varrho_2 = 1$ oder $-1 = (\frac{1}{2}\vartheta_2)^2 - (\frac{1}{2}\vartheta_1)^2 A$ sein, weil -1 kein quadratischer Rest von der Form $4m + 3$ ist, **folglich ist die Gliederzahl nothwendig gerade.**

Ferner zeigt sich aus dem Vorhergehenden, dass an sich sowohl das erste als das zweite System gelten kann. Wenn aber A eine ungerade Potenz einer Primzahl ist, so findet **nur das zweite** System Statt.

Denn wegen der Gleichung $\varrho_1 \varrho_2 = A$, und weil weder ϱ_1 noch ϱ_2 die Einheit ist, gilt das erste System niemals; also gilt das zweite. Daher ist $\sigma_1 \sigma_2 = A$, also entweder $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = A$, und dann ist $A = 8k + 7$ (cf. 2), oder $\sigma_1 = A$, $\sigma_2 = 1$, und dann ist $A = 8k + 3$. Dies giebt folgende Sätze:

a) **Wenn A eine ungerade Potenz einer Primzahl von der Form $8m + 7$ ist, so findet das zweite System Statt und es ist**

$$\sigma_1 = 1, \text{ und } \sigma_2 = A,$$

also ist die Gleichung

$$2 = \vartheta_1^2 - \vartheta_2^2 A$$

vorhanden und 2 ein quadratischer Rest der ungeraden Potenz einer Primzahl von der Form $8m + 7$.

b) **Ist dagegen A eine ungerade Potenz einer Primzahl von der Form $8m + 3$, so findet zwar auch das zweite System Statt, aber es ist**

$$\sigma_1 = A, \text{ und } \sigma_2 = 1,$$

also ist die Gleichung

$$-2 = \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 A$$

vorhanden und -2 ein quadratischer Rest der ungeraden Potenz einer Primzahl von der Form $8m + 3$.

6.

Beweis eines Theils des Reciprocitätsgesetzes.

Ist A das Product zweier Primzahlen M und N von der Form $4m + 3$, also selbst von der Form $4m + 1$, so muss nach dem Obigen die Gleichung

$$1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2 \varrho_1 - (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2 \varrho_2,$$

Statt haben, und dabei ist $\varrho_1 \varrho_2 = A = MN$.

Da nun weder ϱ_1 noch $\varrho_2 = 1$ ist, so muss entweder $\varrho_1 = M$, $\varrho_2 = N$, oder $\varrho_1 = N$, und $\varrho_2 = M$ sein. Es findet also stets eine der beiden folgenden Gleichungen Statt:

$$1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2 M - (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2 N,$$
$$1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2 N - (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2 M:$$

jene, wenn M ein quadratischer Rest von N, diese, wenn N ein quadratischer Rest von M ist. Da nun beide Gleichungen nie zugleich vorhanden sind, so kann nicht zugleich M ein quadratischer Rest von N und N ein quadratischer Rest von M sein d. h.

Wenn zwei Primzahlen beide von der Form $4m + 3$ sind und die eine M ein quadratischer Rest oder Nicht-Rest der andern N ist, so ist diese resp. ein quadratischer Nicht-Rest oder Rest von M.

7.

Discussion des Falles, in welchem A das Product zweier Primzahlen ist; mit Hülfe des Reciprocitätsgesetzes.

Wenn $A = MN$ ist und M und N zwei absolute Primzahlen sind, so können nach dem Vorhergehenden bloss folgende Fälle eintreten:

$$\text{Erstes System}\begin{cases} \alpha) & -\;1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2 - (\tfrac{1}{2}\vartheta)^2 A, \\ \beta) & +\;1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2 M - (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2 N, \\ \gamma) & +\;1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2 N - (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2 M; \end{cases}$$

$$\text{Zweites System}\begin{cases} \delta) & +\;2 = \vartheta_1^2 - \vartheta_2^2 A, \\ \varepsilon) & -\;2 = \vartheta_1^2 - \vartheta_1^2 A, \\ \zeta) & +\;2 = \vartheta_1^2 M - \vartheta_2^2 N, \\ \eta) & +\;2 = \vartheta_1^2 N - \vartheta_2^2 M. \end{cases}$$

a) Wenn M und N beide von der Form $4m + 1$ sind, so gilt nur das erste System, und zwar eine der Gleichungen α), β), γ) wenn $M = RN$ *); denn da zugleich $N = RM$ ist, so enthält jede derselben wenigstens nichts Ungereimtes. Ist aber $M = nRN$, so können, weil zugleich $N = nRM$ ist, β) und γ) nicht Statt haben; folglich gilt dann stets α).

b) Sind M und N beide von der Form $4m + 3$, so gilt ebenfalls nur das erste System und, wie in (6.) gefunden, β) oder γ), je nachdem $M = RN$ oder $M = nRN$ ist.

---

*) $M = RN$ bedeutet im Folgenden, dass M ein quadratischer Rest von N, und $M = nRN$, dass M ein Nicht-quadratischer Rest von N ist.

c) Es sei $M = 4m + 1$ und $N = 4m + 3$. Die Gleichung γ) kann in diesem Falle nie eintreten, weil sie identisch mit $-1 = (\frac{1}{2}\vartheta_2)^2 M - (\frac{1}{2}\vartheta_1)^2 N$ und -1 ein Nicht-Rest von der Form $4m + 3$ ist.

aa) Ist nun $M = RN$, also auch $N = RM$, so findet man, mit Berücksichtigung des Reciprocitätsgesetzes und der Criterien für $+2$ und -2, ob diese Zahlen Rest oder Nicht-Rest sind, leicht die folgenden Combinationen, wo die Buchstaben zur Rechten andeuten, dass eine der Gleichungen, die sie repräsentiren, Statt haben muss:

$$\left.\begin{aligned} M &= 8k + 1 \\ N &= 8k + 7 \\ A &= 8m + 7 \end{aligned}\right\} \beta).\ \delta).\ \zeta) \quad \left.\begin{aligned} M &= 8k + 1 \\ N &= 8k + 3 \\ A &= 8m + 3 \end{aligned}\right\} \beta).\ \varepsilon).\ \eta). \quad \left.\begin{aligned} M &= 8k + 5 \\ N &= 8k + 7 \\ A &= 8m + 3 \end{aligned}\right\} \beta).\ \varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned} M &= 8k + 5 \\ N &= 8k + 3 \\ A &= 8m + 7 \end{aligned}\right\} \beta).\ \delta)$$

bb) Wenn endlich $M = nRN$ ist, so wird man folgende Zusammenstellungen als die einzig möglichen erkennen:

$$\left.\begin{aligned} M &= 8k + 1 \\ N &= 8k + 7 \\ A &= 8m + 7 \end{aligned}\right\} \delta). \quad \left.\begin{aligned} M &= 8k + 1 \\ N &= 8k + 3 \\ A &= 8m + 3 \end{aligned}\right\} \varepsilon) \quad \left.\begin{aligned} M &= 8k + 5 \\ N &= 8k + 7 \\ A &= 8k + 3 \end{aligned}\right\} \varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned} M &= 8k + 5 \\ N &= 8k + 3 \\ A &= 8m + 7 \end{aligned}\right\} \delta).\ \zeta).\ \eta)$$

Daraus folgt, dass für $M = nRN$ das erste System nie Statt hat.

8

Aus dem vorigen § a_1) ergiebt sich folgendes Theorem:

Wenn A ein Product zweier Primzahlen von der Form $4m + 1$ und die eine M ein Nicht-Rest der andern N ist, so muss die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ ungerade sein.

Dieser Satz dient zur Vervollständigung des fraglichen Puncts in (4. c.)

Ein Beispiel bietet der Fall $A + 5.17 = 85$ dar, denn 5 ist ein Nicht-Rest von 17; die Gliederzahl wird hier $= 5$ gefunden.

9.

Zusammenhang der vorhergehenden Zahlen mit Elementen des Kettenbruchs, dessen Periode eine gerade Gliederzahl enthält.

Betrachten wir den Kettenbruch

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = a + \cfrac{1}{a_1 + \dots + \cfrac{1}{a_{\frac{1}{2}k-1} + \cfrac{1}{a_{\frac{1}{2}k} + \cfrac{1}{a_{\frac{1}{2}k-1} + \dots + \cfrac{1}{a}}}}}$$

so lässt sich der Werth desselben zunächst durch $\frac{p_{\frac{1}{2}k-1}}{q_{\frac{1}{2}k-1}}$, $\frac{p_{\frac{1}{2}k-2}}{q_{\frac{1}{2}k-2}}$, und $a_{\frac{1}{2}k}$ bestimmen Denn es ist bekannt, dass der inverse Kettenbruch $\cfrac{1}{a_{\frac{1}{2}k-1} + \cfrac{1}{a_{\frac{1}{2}k-2} + \dots + \cfrac{1}{a_1}}}$

$= \frac{q_{\frac{1}{2}k-2}}{q_{\frac{1}{2}k-1}}$ ist; Daher ist nach dem Bildungsgesetze dreier benachbarten Partialwerthe:

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_{\frac{1}{2}k-1}\left\{a_{\frac{1}{2}k} + \frac{q_{\frac{1}{2}k-2}}{q_{\frac{1}{2}k-1}}\right\} + p_{\frac{1}{2}k-2}}{q_{\frac{1}{2}k-1}\left\{a_{\frac{1}{2}k} + \frac{q_{\frac{1}{2}k-2}}{q_{\frac{1}{2}k-1}}\right\} + q_{\frac{1}{2}k-2}}$$

oder, nach leichten Reductionen, wenn der Kürze wegen

$$(1) \quad G = a_{\frac{1}{2}k}\, q_{\frac{1}{2}k-1} + 2q_{\frac{1}{2}k-2}$$

gesetzt wird,

$$(2) \quad p_{k-1} + (-1)^{\frac{1}{2}k} = p_{\frac{1}{2}k-1}\, G,$$

$$(3) \quad q_{k-1} + \qquad\qquad = q_{\frac{1}{2}k-1}\, G,$$

Da $p_{\frac{1}{2}k-1}$ und $q_{\frac{1}{2}k-1}$ relative Primzahlen sind, so ist G das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen $p_{k-1} + (-1)^{\frac{1}{2}k}$ und q_{k-1}. Es ist also $G = \vartheta_1$ oder $= \vartheta_2$, je nachdem $\frac{1}{2}k$ gerade oder ungerade ist.

Setzt man nun

$$(4) \quad p_{\frac{1}{2}k-1}^2 - Aq_{\frac{1}{2}k-1}^2 = (-1)^{\frac{1}{2}k} B_{\frac{1}{2}k}$$

wo bekanntlich $B_{\frac{1}{2}k}$ der Nenner des mittleren vollständigen Quotienten ist, so folgt aus (2) und (3) leicht, dass

$$(5) \quad 2p_{\frac{1}{2}k-1} = B_{\frac{1}{2}k}\, G$$

ist.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

(*A*) Es sey $B_{\frac{1}{2}k}$ ungerade, also G gerade.

In diesem Falle muss $B_{\frac{1}{2}k}$ nach (5) in $p_{\frac{1}{2}k-1}$, also nach (4) auch in A aufgehen. Setzt man also

$$(6) \quad A = B_{\frac{1}{2}k}\, A^1,$$

so verwandelt sich die Gleichung (4) in folgende:

$$(7) \quad B_{\frac{1}{2}k}.\left(\frac{G}{2}\right)^2 - A^1 q^2_{\frac{1}{2}k-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k};$$

woraus folgt, dass $B_{\frac{1}{2}k}$ und A^1 relative Primzahlen sind.

Ferner wird die Gleichung (2), wenn man für $p_{\frac{1}{2}k-1}$ den Werth aus (5) substituirt,

$$(8) \quad \tfrac{1}{2}\left\{p_{k-1} + (-1)^{\frac{1}{2}k}\right\} = B_{\frac{1}{2}k}.\left(\frac{G}{2}\right)^2,$$

woraus mit Berücksichtigung von (7) folgt:

$$(9) \quad \tfrac{1}{2}\left\{p_{k-1} - (-1)^{\frac{1}{2}k}\right\} = A^1.q^2_{\frac{1}{2}k-1}.$$

Aus dieser Gleichung und aus (3) folgt weiter, dass $2q_{\frac{1}{2}k-1}$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $p_{k-1} - (-1)^{\frac{1}{2}k}$ und q_{k-1} ist. Setzt man endlich

$$(10) \quad 2q_{\frac{1}{2}k-1} = H,$$

so geht (7) über in

$$(11) \quad B_{\frac{1}{2}k}.\left(\frac{G}{2}\right)^2 - A^1.\left(\frac{H}{2}\right)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}k}$$

(*B*) Es sei $B_{\frac{1}{2}k}$ gerade.

Dann ist $p_{\frac{1}{2}k-1} = \frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k}.G$, folglich muss $\frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k}$ in $p_{\frac{1}{2}k-1}$, also nach *Gl.* (4) auch in A aufgehen. Setzt man also

$$(12) \quad A = \tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k}.A^1,$$

so wird

$$(13) \quad \tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k}.G^2 - A^1\, q^2_{\frac{1}{2}-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k}.2.$$

Ferner findet man, wie im ersten Falle,

$$(14) \quad p_{k-1} + (-1)^{\frac{1}{2}k} = \tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k}.G^2$$

$$(15) \quad p_{k-1} - (-1)^{\frac{1}{2}k} = A^1.q_{\frac{1}{2}k-1}:$$

also ist $q_{\frac{1}{2}k-1}$ das grösste gemeinschaftliche Maas von $p_{k-1} - (-1)^{\frac{1}{2}k}$ und q_{k-1}. Setzen wir also hier

$$(16) \quad q_{\frac{1}{2}k-1} = H,$$

so wird endlich

$$(17)\quad \tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k}.G^2 - A^1 H^2 = (-1)^{\frac{1}{2}k} 2;$$

$\tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k}$ und A^1 sind relative Primzahlen.

Wir erhalten demnach folgendes Resultat:

(A) Ist der Nenner des mittl. vollst. Quotienten ungerade, so hat man

Für ein gerades $\tfrac{1}{2}k$:

$$\begin{cases} G = \vartheta_1, \\ B_{\frac{1}{2}k} = \varrho_1, \\ 2q_{\frac{1}{2}k-1} = \vartheta_2, \\ A^1 = \varrho_2. \end{cases}$$

Für ein ungerades $\tfrac{1}{2}k$:

$$\begin{cases} G = \vartheta_2, \\ B_{\frac{1}{2}k} = \varrho_2, \\ 2q_{\frac{1}{2}k-1} = \vartheta_1, \\ A^1 = \varrho_1. \end{cases}$$

(B) Ist aber der Nenner des mittl. vollst. Quotienten gerade, so wird

Für ein gerades $\tfrac{1}{2}k$:

$$\begin{cases} G = \vartheta_1, \\ \tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k} = \sigma_1, \\ q_{\frac{1}{2}k-1} = \vartheta_2, \\ A^1 = \sigma_2. \end{cases}$$

Für ein ungerades $\tfrac{1}{2}k$:

$$\begin{cases} G = \vartheta_2, \\ \tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k} = \sigma_2, \\ q_{\frac{1}{2}k-1} = \vartheta_1, \\ A^1 = \sigma_1. \end{cases}$$

Zugleich ergiebt sich folgendes Theorem:

Ist die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs gerade, so findet das erste oder das zweite System Statt, je nachdem der Nenner des mittl. vollst. Quotienten ungerade oder gerade ist.

Daher nach (3.):

Wenn A die Form $4m+1$ hat, so muss der Nenner des mittl. vollständ. Quotienten stets ungerade sein.

Ferner nach (5.):

Wenn A eine ungerade Potenz einer Primzahl von der Form $4m+3$ ist, so muss der Nenner der mittl. vollst. Quotienten stets gerade sein.

Endlich nach (7 c. und 6 b):

Wenn A von der Form $4m+3$ und das Product zweier Primzahlen M, N, und ausserdem M ein Nicht-quadratischer Rest von N, ist, so muss der Nenner des mittl. vollst. Quotienten gerade sein.

10.

Untersuchung der Mittelwerthe durch das Bildungsgesetz des Kettenbruchs selbst.

Aus den bekannten Gleichungen

$$I_n + I_{n+1} = a_n B_n$$
$$B_n \; B_{n+1} = A - I^2_{n+1}$$

folgt für $n = \frac{1}{2}k$, da bekanntlich $I_{\frac12 k} = I_{\frac12 k+1}$ ist:

$$(18) \quad 2 I_{\frac12 k} = a_{\frac12 k} B_{\frac12 k}$$
$$(19) \quad B_{\frac12 k} B_{\frac12 k+1} = A - I^2_{\frac12 k}$$

Es sei nun wieder

(A) $B_{\frac12 k}$ ungerade, also $a_{\frac12 k}$ gerade.

Dann ist $I_{\frac12 k} = \frac{1}{2} a_{\frac12 k} \; B_{\frac12 k}$. Substituirt man diesen Werth in (19), so kommt $B_{\frac12 k} B_{\frac12 k+1} = A - (\frac12 a_{\frac12 k})^2 B_{\frac12 k}^2$, also ist A durch $B_{\frac12 k}$ theilbar, oder $A = B_{\frac12 k} . A^1$, folglich auch

$$(20) \quad B_{\frac12 k+1} = A^1 - (\tfrac12 a_{\frac12 k})^2 B_{\frac12 k},$$

woraus folgt, dass $B_{\frac12 k}$ stets $< A^1$ ist.

(B) Ist $B_{\frac12 k}$ gerade, so hat man $I_{\frac12 k} = a_{\frac12 k} \frac12 B_{\frac12 k}$; ferner überzeugt man sich mittels (19) dass $\frac12 B_{\frac12 k}$ in A aufgehen muss, und für $A = \frac12 B_{\frac12 k} A^1$ wird

$$(21) \quad 2 B_{\frac12 k+1} = A^1 - a_{\frac12 k}^2 . \tfrac12 B_{\frac12 k},$$

woraus folgt, dass $\frac12 B_{\frac12 k}$ stets $< A^1$ ist.

Für beide Fälle haben wir dann $\frac{\sqrt{A} + I_{\frac12 k}}{B_{\frac12 k}} \begin{matrix} > a_{\frac12 k} \\ < a_{\frac12 k} + 1 \end{matrix}$. Daraus ergeben sich leicht die Grenzen:

$$(20) \quad \left\{ I_{\frac12 k} \begin{matrix} < \sqrt{A} \\ > \sqrt{A} - B_{\frac12 k} \end{matrix} \right. \quad \text{oder } 22^*) \; \frac{I_{\frac12 k}}{B_{\frac12 k}} \begin{matrix} < \frac{\sqrt{A}}{B_{\frac12 k}} \\ > \frac{\sqrt{A}}{B_{\frac12 k}} - 1 \end{matrix}$$

11.

Bestimmung der Mittelwerthe in besondern Fällen.

a) Ist A eine ungerade Potenz einer absoluten Primzahl (welche letztere von der Form $4m + 3$ sein muss, da die Gliederzahl der Periode gerade ist), so muss der Nenner des mittlern vollst. Quotienten nach q gerade sein. Da nun $A = \frac12 B_{\frac12 k} . A$, und $\frac12 B_{\frac12 k} < A^1$ ist, so muss $\frac12 B_{\frac12 k} = 1$, also $B_{\frac12 k} = 2$ sein. Aus (22) folgt also $I_{\frac12 k} = a - 1$ oder a, und da $I_{\frac12 k}$ nach (19) ungerade ist,

so ist es vollkommen bestimmt. Endlich ist $a_{\frac{1}{2}k} = I_{\frac{1}{2}k}$ (Gl. 18). Also ist hier

$$(23)\quad \begin{cases} B_{\frac{1}{2}k} = 2 \\ I_{\frac{1}{2}k} = a_{\frac{1}{2}k} = a-1 \text{ oder } a \text{ (ungerade)} \end{cases}$$

β) Es sei A das Product zweier ungeraden Potenzen absoluter Primzahlen, oder $A = U^u V^v$

$\alpha\alpha$) Ist der Nenner des mittl. vollst. Quotienten **ungerade**, so muss, weil $B_{\frac{1}{2}k}$ und A^1 relative Primzahlen sind, $B_{\frac{1}{2}k} < A^1$ ist und $B_{\frac{1}{2}k}$ nie $= 1$ sein kann, stets $B_{\frac{1}{2}k} = U^u$ sein, wenn man annimmt, dass $U^u < V^v$ ist. Nach 22*) ist ferner $\frac{1}{2}a_{\frac{1}{2}k} < \frac{\sqrt{A}}{U^u}$ und $> \frac{\sqrt{A}}{U^u} - 1$ d. i. $< \sqrt{\frac{V^v}{U^u}}$ und $> \sqrt{\frac{V^v}{U^u}} - 1$. Bezeichnen wir also die grösste in $\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}$ enthaltene ganze Zahl durch $G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right)$, so ist $a_{\frac{1}{2}k} = 2G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right)$. $I_{\frac{1}{2}k}$ ergiebt sich aus (18).

Es ist also

$$(24)\quad \begin{cases} B_{\frac{1}{2}k} = U^u, \\ a_{\frac{1}{2}k} = 2G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right), \\ I_{\frac{1}{2}k} = U^u\, G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right), \end{cases}$$

$\beta\beta$) Ist $B_{\frac{1}{2}k}$ gerade, so ist $\frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}k} = U^u$ und ähnlich wie vorher ergiebt sich

$$(25)\quad \begin{cases} B_{\frac{1}{2}k} = U^u, \\ a_{\frac{1}{2}k} = G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right) \text{ oder } G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right) - 1 \text{ (ungerade)}, \\ I_{\frac{1}{2}k} = U^u G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right) \text{ oder } U^u\left\{G\left(\sqrt{\frac{V^v}{U^u}}\right) - 1\right\} \text{ (ungerade)}. \end{cases}$$

II. Discussion der Gleichung $p^2 - Aq^2 = 1$, wenn A eine ungerade Potenz von 2 ist.

12.

Es ist hier $(p+1)(p-1) = 2^n q^2$. Da aber p nothwendig ungerade ist, so kann man die Gleichung $\frac{1}{2}(p+1).\frac{1}{2}(p-1) = 2^{n-2}q^2$ setzen. Ist nun ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{1}{2}(p+1)$ und q, so hat man $\frac{1}{2}(p+1) = \vartheta^2\varrho_1$, $q = \vartheta q^1$, und dann $\varrho^1 . \frac{1}{2}(p-1) = 2^{n-2}q^{1^2}$ Da fer-

ner q^1 zu ϱ_1 relative Primzahl ist, so ist $\frac{1}{2}(p-1) = q^{1^2}\varrho_2$, und dann endlich $\varrho_1\varrho_2 = 2^{n-2}$, also $\varrho_1 = 2^\lambda$ und $\varrho_2 = 2^\mu$, wo $\lambda + \mu = n - 2$.

Nun erhält man $1 = \vartheta^2.2^\lambda - q^{1^2}.2^\mu$, also entweder $\lambda = o$ oder $\mu = o$. Im letzten Falle ist $q^{1^2} - 2^{n-2}\vartheta^2 = -1$ oder $q^{1^2} + 1 = 2^{n-2}\vartheta^2$. Da aber $q^{1^2} + 1$ die Form $8k + 2$ hat, so kann diese Gleichung nicht bestehen wenn $n - 2 > 1$ d. i. $n > 3$ ist. Nehmen wir dies an, so ist $\lambda = o$, daher

$$(26)\begin{cases} \frac{1}{2}(p+1) = \vartheta^2, \\ \frac{1}{2}(p-1) = 2^{n-2}\left(\frac{q}{\delta}\right)^2 \end{cases}$$

$$1 = \vartheta^2 - 2^{n-2}\left(\frac{q}{\delta}\right)$$

Setzt man $\vartheta = p_o$ und $\frac{q}{\delta} = q_o$, so wird

$$(27)\begin{cases} p = 2p_o^2 - 1, \\ q = p_o q_o. \end{cases}$$

Sind p_o, q_o die kleinsten Werthe für die Gleichung

$$(28)\quad p_o^2 - 2^{n-2}\,q_o^2 = 1,$$

so müssen auch p und q, bestimmt durch die Gl. (27), die kleinsten Werthe der Gleichung

$$(29)\quad p^2 - 2^n\,q^2 = 1$$

sein.

Denn, gesetzt der letztern Gleichung genügen kleinere Werthe x und y; bestimmt man dann x_o und y_o und $x = 2x_o^2 - 1$ und $y = y_o$, so genügen x_o und y_o der Gleichung (28); welches unmöglich, da x_o stets kleiner ist als p_o.

Nun ergiebt sich für $\sqrt{8}$ leicht $p_o = 3$, $q_o = 1$; also kann man mittelst der Gl. (27) successive die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 2^n\,y^2 = 1$$

für jedes n finden.

Man erhält auf diese Weise, wenn jene Wurzeln überhaupt durch p und q bezeichnet werden:

$$(30).\begin{cases} \text{für } n = 3 & p = 3 & q = 1 \\ \phantom{\text{für }} n = 5 & p = 17 & q = 3 \\ \phantom{\text{für }} n = 7 & p = 577 & q = 57 \\ \phantom{\text{für }} n = 9 & p = 665857 & q = 29427 \end{cases}$$

u. s. w.

Diese Zahlen sind, wie aus (27) folgt, sämmtlich ungerade.

13.

Da die Gleichung $p^2 - 2^n q^2 = -1$ nicht auflösbar ist, wenn $n > 1$, so folgt, dass die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{2^n}$ stets gerade ist, ausgenommen den Fall $n = 1$; dann ist die Gliederzahl die Einheit.

14.

Zusammenhang der vorhergehenden Zahlen mit Elementen des Kettenbruchs.

Da $B_{\frac{1}{2}k}$ in 2^n aufgehen muss, so setze man $B_{\frac{1}{2}k} = 2^\lambda$; dann wird nach dem Vorhergehenden $p_{\frac{1}{2}k-1} = 2^{\lambda-1}\,G$, also $2^{2\lambda-2}G^2 - 2^n q^2_{\frac{1}{2}k-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k}.2^\lambda$, oder $2^{\lambda-2}G^2 - 2^{n-\lambda}\;q^2_{\frac{1}{2}k-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k}$. Da nun nicht $n - \lambda = o$ sein kann, indem $B_{\frac{1}{2}k} < 2^n$ ist, so ist $\lambda - 2 = o$, also $B_{\frac{1}{2}k} = 4$. Ferner ist G ungerade und $= \vartheta$, und $q_{\frac{1}{2}k-1} = \frac{q}{\vartheta}$, also auch $q_{\frac{1}{2}k-1}$ ungerade, und wegen $G = a_{\frac{1}{2}k}\;q_{\frac{1}{2}k-1} + 2q_{\frac{1}{2}k-1}$, auch $a_{\frac{1}{2}k}$ ungerade. Sodann ist $a_{\frac{1}{2}k} < \sqrt{2^{n-2}}$ und $> \sqrt{2^{n-2}} - 2$, endlich $I_{\frac{1}{2}k} = 2a_{\frac{1}{2}k}$. Demnach ist nun

$$(31)\quad\left\{\begin{array}{l} B_{\frac{1}{2}k} = 4, \\ a_{\frac{1}{2}k} = G(\sqrt{2^{n-2}}) \text{ oder } G(\sqrt{2^{n-2}}) - 1 \text{ (ungerade)}, \\ I_{\frac{1}{2}k} = 2\;G(\sqrt{2^{n-2}}) \text{ oder } 2\,\{G(\sqrt{2^{n-2}}) - 1\}. \end{array}\right.$$

Beispiel. $A = 2^7 = 128$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{128} = 11 + \frac{\sqrt{128}-11}{1} \\ \frac{1}{\sqrt{128}-11} = \frac{\sqrt{128}+11}{7} = 3 + \frac{\sqrt{128}-10}{7} \\ \frac{7}{\sqrt{128}-10} = \frac{\sqrt{128}+10}{4} = 5 + \frac{\sqrt{128}-10}{4} \\ \frac{4}{\sqrt{128}-10} = \frac{\sqrt{128}+10}{7} = 3 + \frac{\sqrt{128}-11}{7} \\ \frac{7}{\sqrt{128}-11} = \frac{\sqrt{128}+11}{1} = 22 + \frac{\sqrt{128}-11}{1} \end{array}\right\}$$

Hier ist die Gliederzahl $k = 4$, also gerade.

Ferner $B_{\frac{1}{2}k} = 4$, $a_{\frac{1}{2}k} = G(\sqrt{2^5}) = 5$, und $I_{\frac{1}{2}k} = 2.5 = 10$.

III. Discussion der Gleichung
$p^2 - Aq^2 = 1$,
wenn $A = 2^n A^1$, wo A^1 ungerade ist.

15.

Durch Betrachtungen, die den frühern durchaus ähnlich sind, findet man folgendes System von Gleichungen:

$$(32).\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(p+1) = \vartheta^2\varrho_1, \\ \tfrac{1}{2}(p-1) = \left(\tfrac{q}{\vartheta}\right)^2\varrho_2, \\ \qquad 1 = \vartheta^2\varrho_1 - \left(\tfrac{q}{\vartheta}\right)^2\varrho_2, \\ \quad \varrho_1\varrho_2 = 2^{n-2}A^1 = \tfrac{1}{4}A. \end{cases}$$

Da die Gleichung $-1 = x^2 - Ay^2$ in diesem Falle nie auflösbar ist, wenn $n > 1$, so folgt, dass die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{2^n A^1}$ stets gerade ist, wenn $n > 1$.

Auf den Fall $n = 1$ hat das vorhergehende System keine Anwendung. Man bildet sich das zu diesem Fall Gehörige eben wie in 1; denn da $(p+1)(p-1) = 2A^1q^2$, und p ungerade, also $(p+1)(p-1)$ durch 4 theilbar ist, so muss q gerade sein. Man erhält also:

$$(33).\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(p+1) = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2\varrho_1, \\ \tfrac{1}{2}(p-1) = (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2\varrho_2, \\ \qquad 1 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1)^2\varrho_1 - (\tfrac{1}{2}\vartheta_2)^2\varrho_2, \\ \quad \varrho_1\varrho_2 = 2A^1, \\ \quad \tfrac{1}{2}\vartheta_1 \cdot \tfrac{1}{2}\vartheta_2 = \tfrac{1}{2}q. \end{cases}$$

Gedruckt bei J. Petsch in Berlin.

Fac simile einer Handschrift von De Lalande

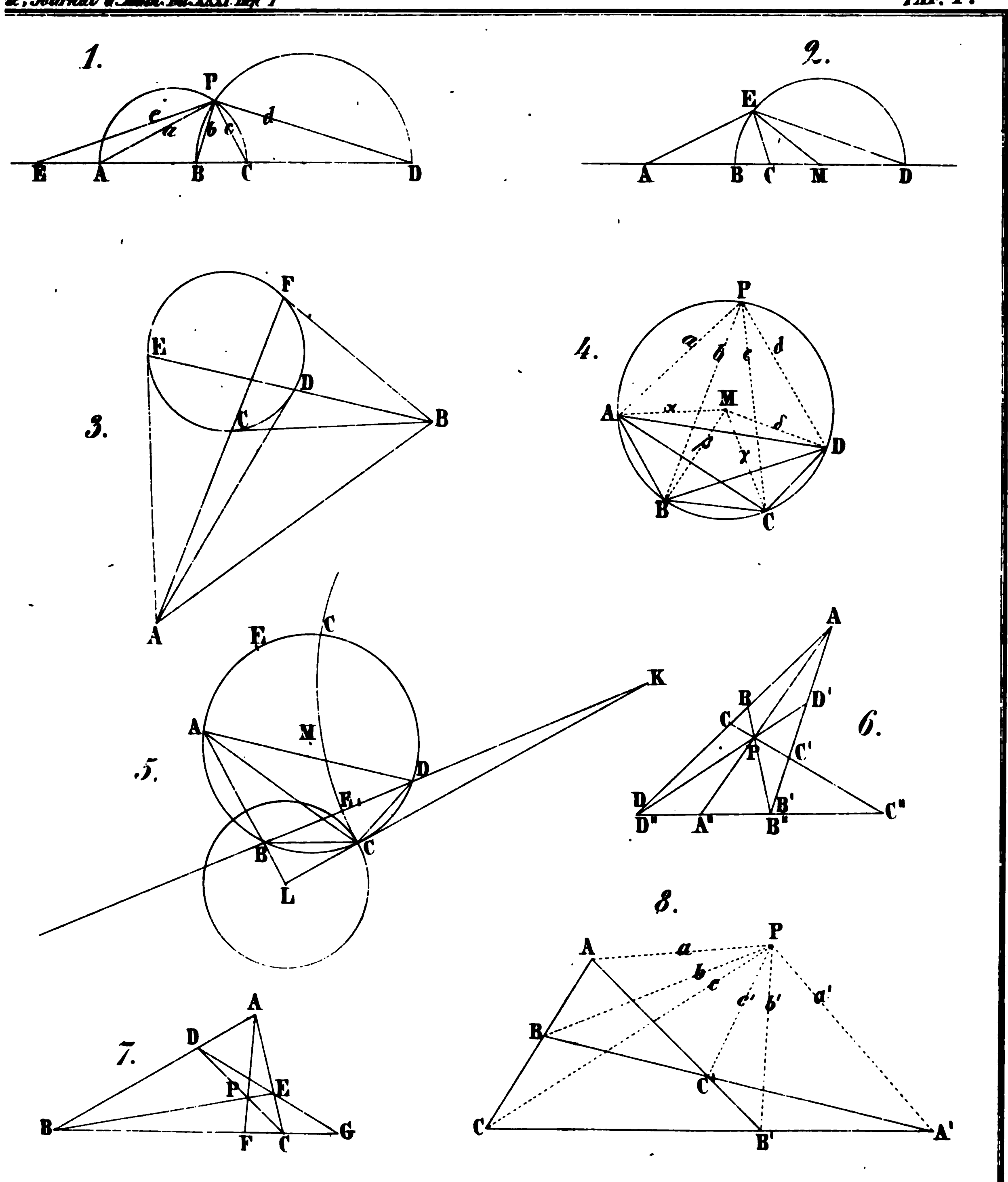
Monsieur

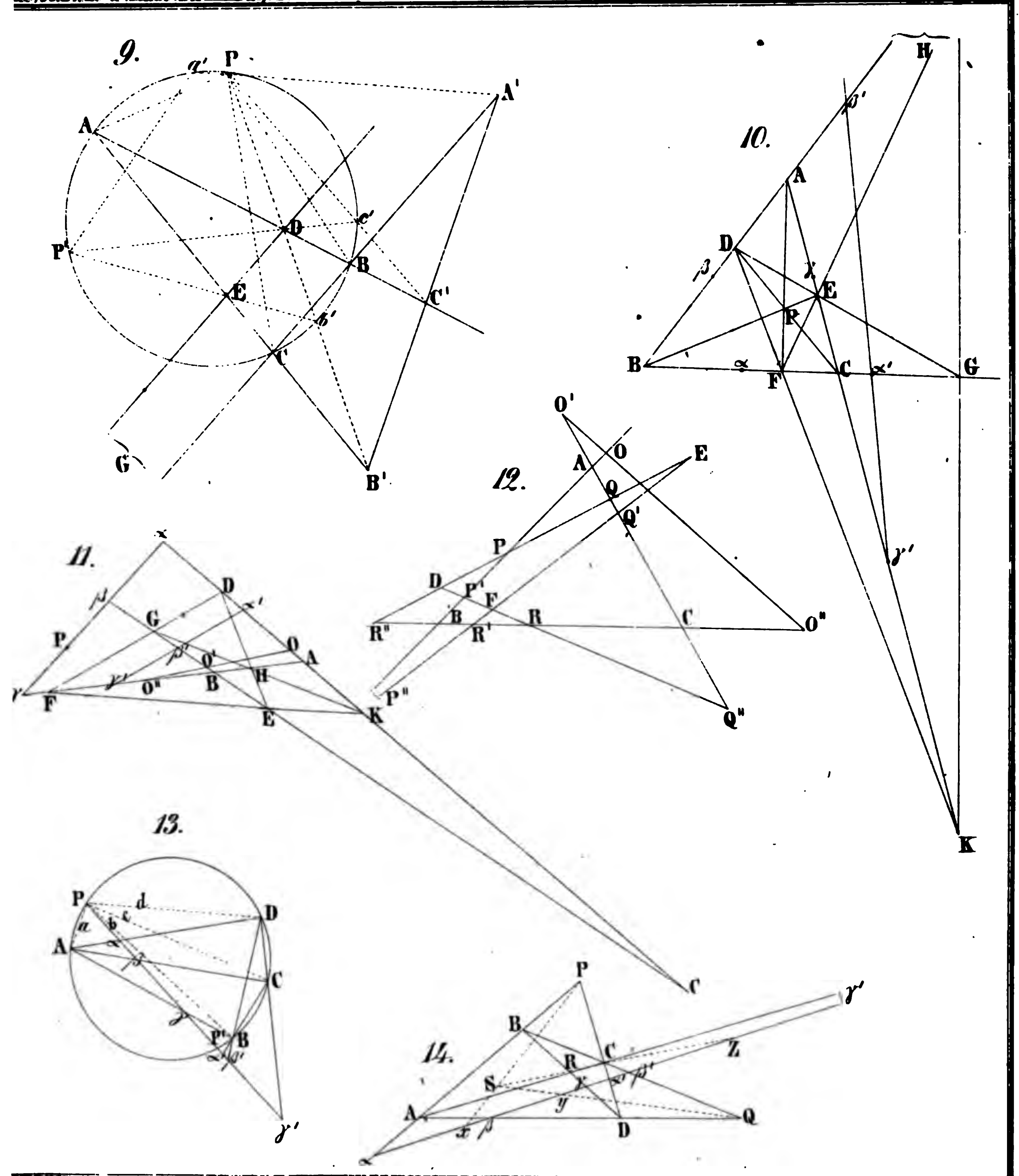
Vous excuserés bien la liberté que je prends de joindre
ma faible recommandation auprès de vous a celle qu'a
desja le jeune homme que je vous envoye
denné jusqu'icy da protections il n'a pû trouver moyen
de faire valoir les talents que son éducation luy
a procurés, et il a recours a vous pour que vous
daigniés luy aider a en trouver si l'occasion s'en
presente; il ecrit fort bien l'allemand et le françois
il sçait le latin, et il a fait apprentissage de
chirurgie dont il a des attestations; il est d'une
famille très honnete et a qui je voudrois bien
pouvoir rendre service; j'espere monsieur que
vous daigneres joindre votre bonne volonté a la mienne
je vous aurai de nouvelles obligations quelque succès
qu'elle puisse avoir,
j'ai l'honneur d'etre avec les sentiments les plus respectueux

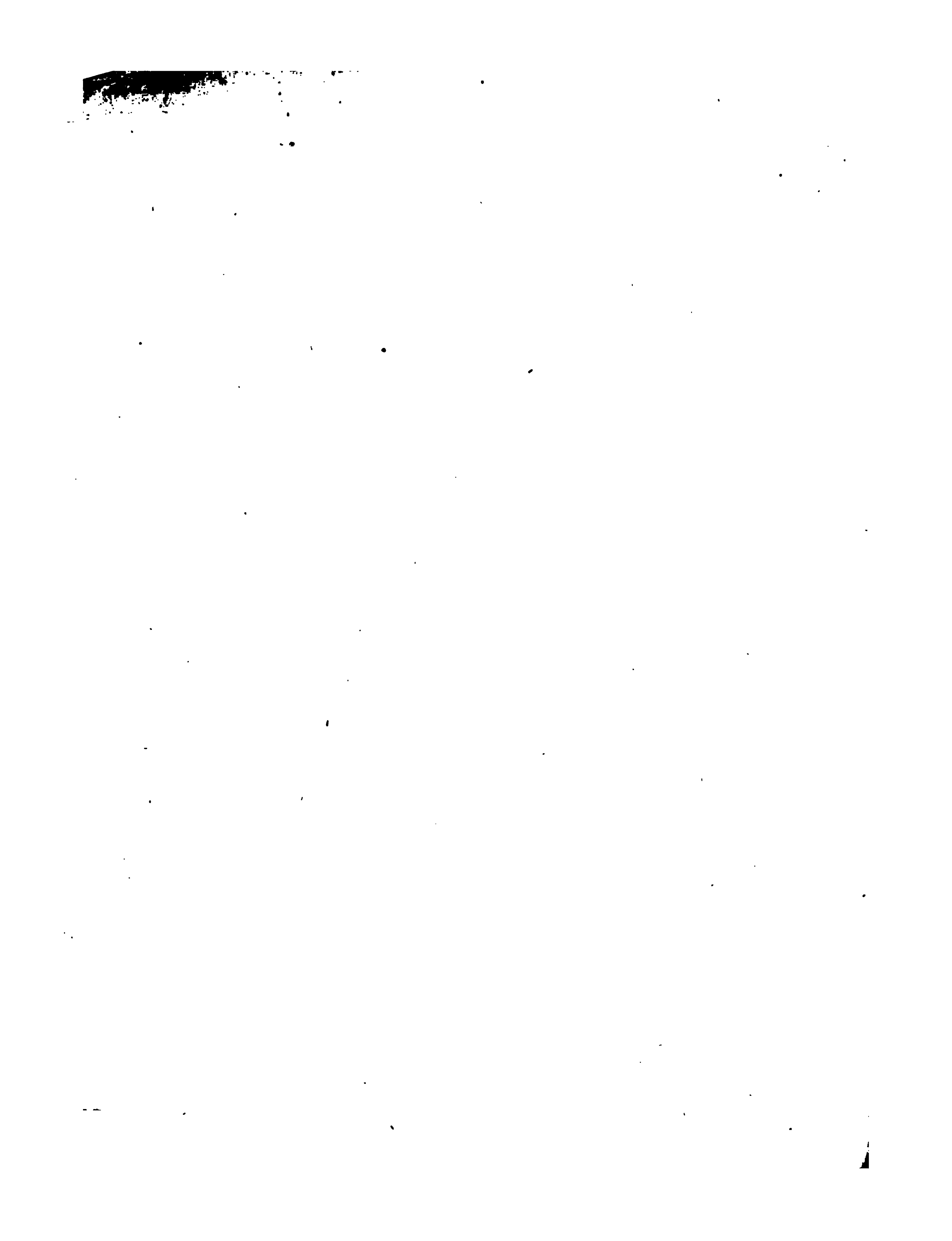
Monsieur

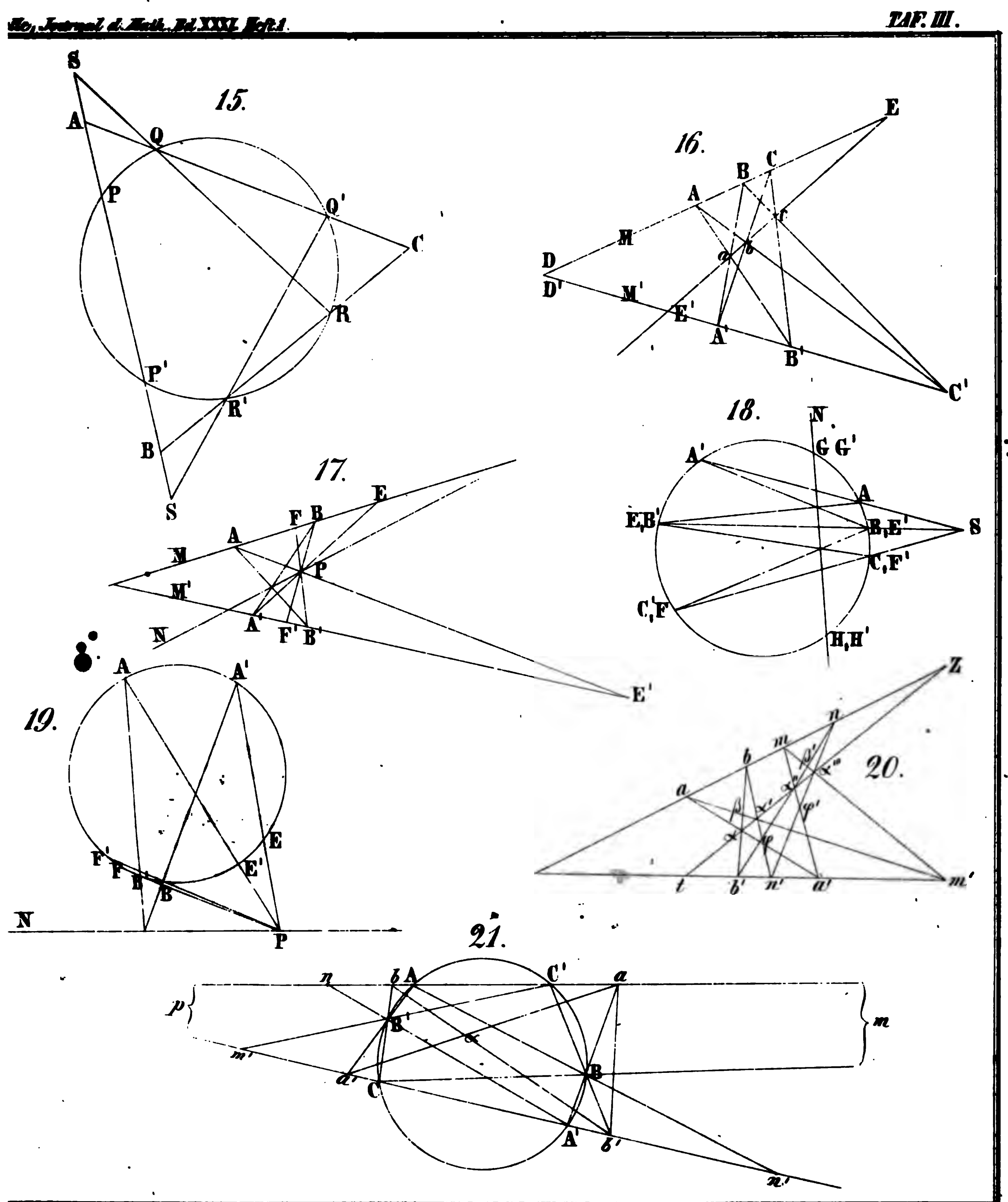
Le 18 may 1752

Votre tres humble
serviteur
Delalande

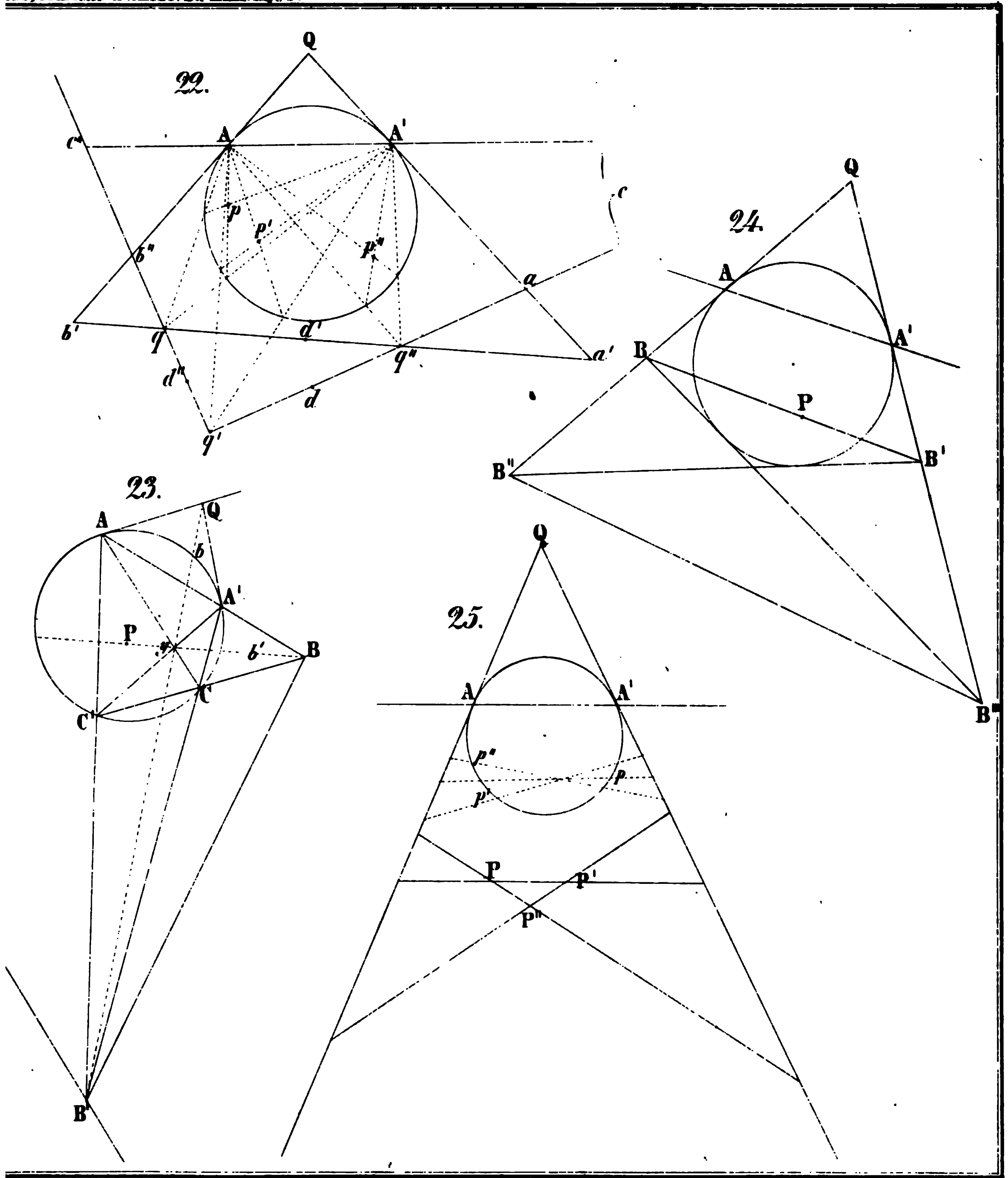

1.
P
e a b c d
E A B C D
2.
E
A B C M D
3.
F
E
D
C
B
A
4.
P
a b c d
M
A
α δ
β γ
D
B C
5.
E
C
A
M
D
E,
K
B C
L
6.
A
B D'
C
P C'
D B'
D'' A'' B'' C''
7.
A
D
P E
B F C G
8.
P
A a
b c
c' b' a'
B
C'
C B' A'

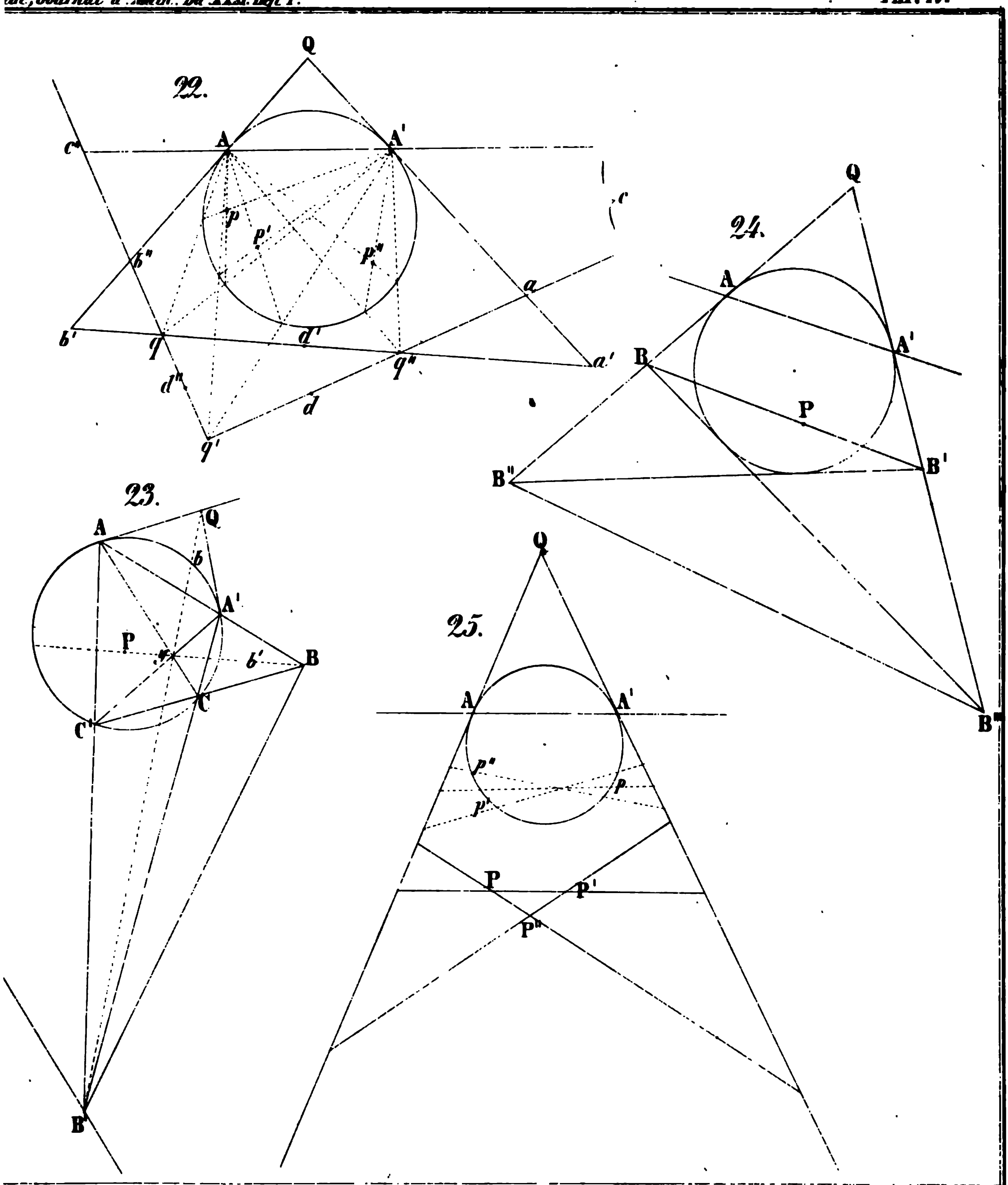

9.
10.
11.
12.
13.
14.




15.
S
A
Q
P
Q'
C
R
P'
R'
B
S
16.
E
B
C
A
M
D
D'
M'
E'
A'
B'
C'
17.
F
B
E
A
M
P
M'
N
A'
F'
B'
E'
18.
N
G G'
A'
A
E,B'
B,E'
S
C,F'
C,F
H,H'
19.
A
A'
F'
F
E'
E
N
P
20.
Z
n
m
b
a
t
b'
n'
a'
m'
21.
n
b
A
C'
a
p
B'
m
m'
a'
C
B
A'
b'
n'




22.
23.
24.
25.



22.
Q
A
A'
c''
c
p
p'
p''
b''
a
b'
q
d'
q''
a'
d''
d
q'
23.
A
Q
b
A'
P
b'
B
C
C'
B'
24.
Q
A
A'
B
P
B''
B'
B'''
25.
Q
A
A'
p''
p
p'
P
P'
P''

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

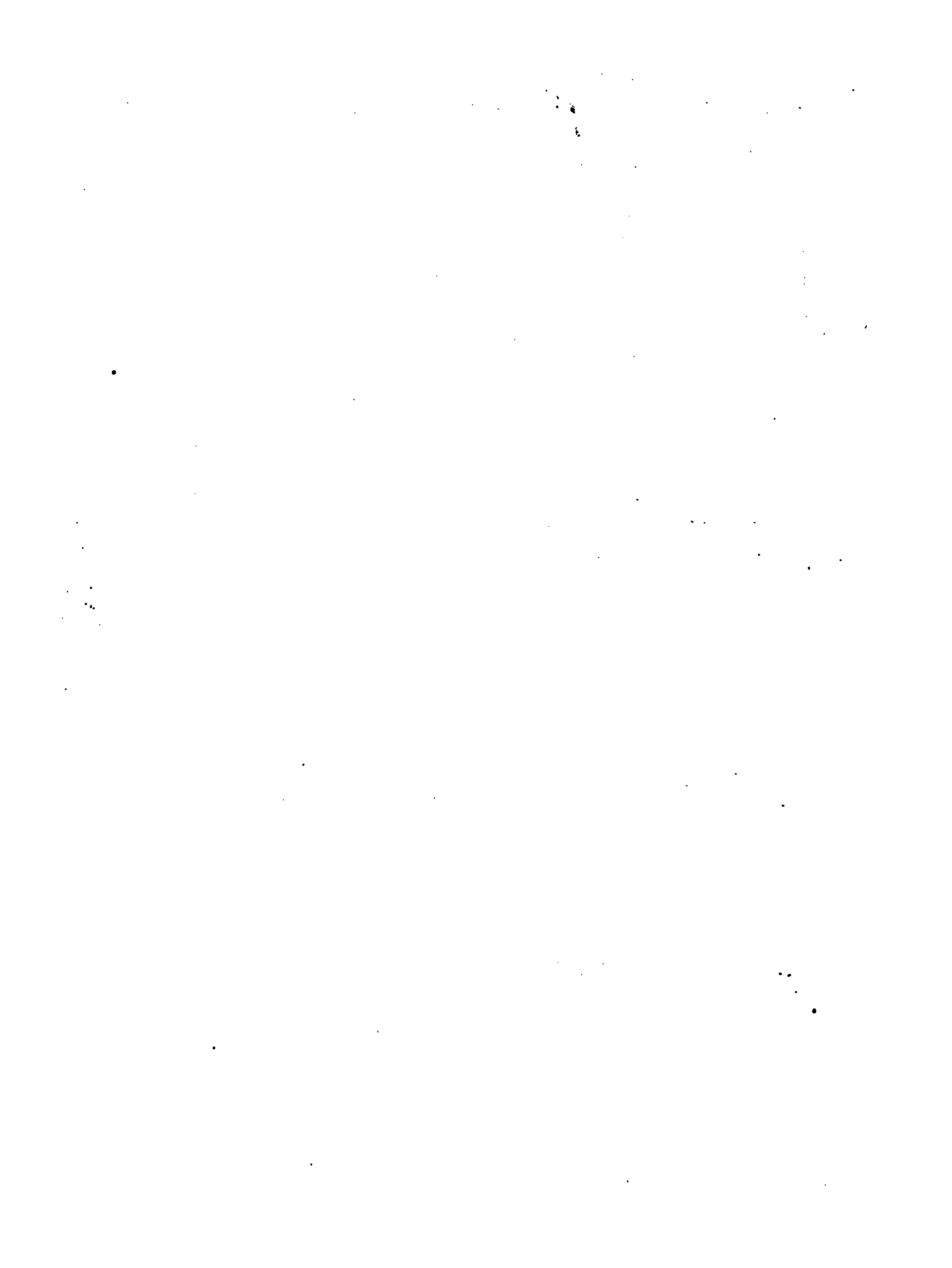
9.

10.

11.

12.

13.



STORAGE AR[illegible]

